

Geiger, Klaus

Disbui.Frankfurt a/Mai

1989

Glueballs und ihre Eigenschaften im Rahmen eines erweiterten Bag Modells

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik

der Johann Wolfgang Goethe - Universität
zu Frankfurt am Main

von

Klaus Geiger

aus

Stuttgart

Frankfurt am Main, 1989

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik der Johann Wolfgang Goethe
Universität zu Frankfurt am Main.

Dekan:	Prof. Dr. H. Klein
Leiter der Arbeit:	Prof. Dr. B. Müller
Erstgutachter:	Prof. Dr. W. Greiner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. B. Müller

Tag der mündlichen Prüfung: 22. August 1989

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Einleitung und Überblick	1
1.2	Aufbau und Gliederung der Arbeit	5
2	Glueballs und QCD	13
2.1	QCD-Vorstellungen der starken Wechselwirkung	13
2.2	Glueballs und Hybride	15
2.3	Theoretische Glueball-Modelle	21
3	Chromodynamik und kovariante Quantisierung	26
3.1	Klassische Chromodynamik	27
3.2	Eichinvarianz und Geisterzustände	29
3.3	Kovariante kanonische Quantisierung	40
3.4	Definition physikalischer Zustände	42
4	Störungstheorie für die QCD in einer sphärischen Kavität - Feynman Regeln	46
4.1	Das Gell-Mann und Low Theorem	47
4.2	QCD mit Randbedingungen für die sphärische Kavität	53
4.3	Störungstheoretische Auswertung und graphische Darstellung	61
4.4	Feynman Regeln	71
4.5	Praktische Anwendung der Feynman Regeln	82

5	Das Modell - vereinheitlichte Beschreibung von Glueballs, Mesonen und Baryonen	85
5.1	Grundzüge des Bag Modells	86
5.2	Erweiterung und Verbesserung des naiven Bag Modells	93
	5.2.1 Energie der Konstituenten im Bag in 1.Ordnung Störungstheorie	93
	5.2.2 Energiebeiträge E_{VAC} der Vakuumfluktuationen	107
	5.2.3 Gesamtenergie des Bags - Massenformel	109
6	Hadronen und Glueballs	113
6.1	Mesonen und Baryonen	114
	6.1.1 Berechnung der Hadron Massen	115
	6.1.2 Resultate für das Hadron Massenspektrum	117
	6.1.3 Vergleich mit anderen Bag Modell Rechnungen	120
	6.1.4 Diskussion der Ergebnisse und phänomenologische Konsequenzen	122
	6.1.5 Fazit der Analyse des Hadron Spektrums	133
6.2	Glueballs	134
	6.2.1 Berechnung der Glueball Massen	135
	6.2.2 Resultate für das Glueball Massenspektrum	138
	6.2.3 Diskussion der Resultate und phänomenologische Schlußfolgerungen	142
	6.2.4 Vergleich mit anderen Bag Modell Rechnungen	148
	6.2.5 Analyse der numerischen Resultate	151

7	$(\eta - \eta' - \iota)$ - Mischung, Zerfälle und Produktion von Glueballs	166
7.1	Modell der $(\eta - \eta' - \iota)$ - Mischung	168
7.1.1	Berechnung der Mischung zwischen η , η' , ι und deren angeregter Zustände	168
7.1.2	Resultate für die $(\eta - \eta' - \iota)$ - Mischung	172
7.2	Zerfallseigenschaften von η , η' und ι	181
7.2.1	Elektromagnetische Strahlungszерfälle	182
7.2.2	2-Photon Zerfälle	192
7.3	Glueball-Produktion in J/ψ -Zerfällen	203
7.3.1	Glueball-Produktion in den Strahlungszерfällen $J/\psi \rightarrow P + \gamma$	208
7.3.2	Glueball-Produktion in den hadronischen Zerfällen $J/\psi \rightarrow P + V$	217
8	Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen	232
	Anhang	237
A :	Eigenmoden von Quarks, Gluonen und Geistern in der statischen Kavität	238
A1:	Quarks	238
A2:	Gluonen	243
A3:	Geister	249
B :	Propagatoren und Vertexfunktionen für Quarks, Gluonen und Geister in der statischen Kavität	252
B1:	Propagatoren	252
B2:	Quark-Gluon Vertizes	255

B3:	3-Gluon Vertizes	259
B4:	4-Gluon Vertizes	265
B5:	Geist-Gluon Vertizes	269
C :	Wechselwirkung von 2-Teilchen Zuständen in 1.Ordnung Störungstheorie	272
C1:	Physikalische Zustandsvektoren	272
C2:	$q\bar{q}$ - und qq -Wechselwirkung	276
C3:	gg -Wechselwirkung	281
C4:	$(gg \leftrightarrow q\bar{q})$ -Wechselwirkung	287
C5:	Matrixelemente der Wechselwirkungs-Operatoren $\hat{V}$	291
D :	SU(3)-Farbkopplung von Quarks und Gluonen zu zusammengesetzten Zuständen	294
D1:	Die Generatoren der SU(3)	294
D2:	Farbkopplung von Quarks und Gluonen	296
E :	Notation und Einheiten	300
Literaturverzeichnis		303
Danksagung		
Lebenslauf		

1 Einführung

1.1 Einleitung und Motivation

Das Thema dieser Arbeit ist die Untersuchung von sogenannten *Glueballs* im Rahmen der Theorie der Quantenchromodynamik (QCD).

Die QCD ist nach heutigem Verständnis die Theorie, die der starken Wechselwirkung zugrunde liegt. Sie beschreibt erfolgreich viele experimentell beobachtete Eigenschaften der Hadronen als gebundene Zustände von Quarks, die durch Austausch von Gluonen miteinander wechselwirken. Aufgrund des nichtlinearen Charakters der QCD ist es allerdings bisher nicht gelungen, die Bewegungsgleichungen der Theorie exakt zu lösen, so daß zahlreiche experimentell beobachtete Eigenschaften der starken Wechselwirkung bis jetzt nicht verstanden werden, insbesondere das Phänomen des sogenannten 'Confinements', d.h. der Tatsache, daß Quarks und Gluonen nicht als freie Teilchen zu existieren scheinen.

Neben den wohlbekannten Hadronen sagt die QCD prinzipiell die Existenz neuartiger Teilchenzustände voraus, wobei die Gluonen als die elementaren Quantenteilchen der Theorie eine wesentliche, dynamische Rolle spielen.

Zu diesen neuen Teilchenzuständen zählen die sogenannten *Glueballs*: Unter diesem Begriff versteht man zusammengesetzte Objekte, deren Substruktur überwiegend durch mehrere Gluonen als Konstituenten bestimmt ist, und die nicht, wie die gewöhnlichen Hadronen, aus Quarks als innere Konstituenten bestehen. Eine ein-

deutige experimentelle Identifizierung derartiger Zustände ist bisher allerdings noch nicht gelungen.

Ein wichtiger Aspekt der Forschung auf dem Gebiet der Hochenergie- und Elementarteilchenphysik ist, die Vorhersagen der QCD zu testen und Aufschluß über die bislang nicht verstandenen Grundzüge der Theorie zu erhalten. Die Gültigkeit der QCD hängt im wesentlichen von der Existenz der Gluonen ab.

Daher ist das Studium der bis jetzt hypothetischen Glueballs von essentieller Bedeutung für die Verifizierung der QCD als Theorie der starken Wechselwirkung, insofern, als eine eindeutige experimentelle Identifizierung der theoretisch vorhergesagten Glueballs eine (weitere) Bestätigung für die Gültigkeit der QCD wäre. Dies setzt allerdings quantitative Vorhersagen der Eigenschaften von Glueballs voraus.

In diesem Zusammenhang ist die Motivation für die vorliegende Arbeit über Glueballs zu sehen. Das Ziel ist, das Massenspektrum, die Zerfallseigenschaften und Produktionsmechanismen solcher Glueballs zu untersuchen und möglichst definitive Vorhersagen zu treffen, d.h. im einzelnen:

- In welchem Energiebereich liegen die Massen von Glueballs ?
- Wie sieht die Struktur des Massenspektrums aus ?
- Welche charakteristischen Quantenzahlen tragen die einzelnen Glueball-Zustände?
- Welche Bedeutung haben Mischungen zwischen Glueballs und gewöhnlichen Mesonen für das Massenspektrum und die dynamischen Eigenschaften dieser Zustände?
- Welches sind die charakteristischen Zerfallseigenschaften von Glueballs, die sie von den Mesonen unterscheiden?

- Was sind typische Prozesse für die Erzeugung von Glueballs? In welchen Reaktionen werden Glueballs bevorzugt produziert?

Da es bislang nicht möglich ist, die Bewegungsgleichungen der QCD exakt zu lösen, ist man bei der praktischen Untersuchung dieser Fragen auf approximative Lösungsansätze oder phänomenologische Modelle angewiesen. In dieser Arbeit wird ein *Bag Modell* zur Beschreibung der Glueball-Eigenschaften verwendet und zwar eine erweiterte Version des ursprünglichen, recht simplen 'MIT-Bag Modells'.

Dieser Modellansatz ist insofern sinnvoll, als damit die wesentlichen Grundzüge des Hadronspektrums erfolgreich vorhergesagt werden, so daß man hoffen kann, daß er ein ebenso adäquater Lösungsansatz zur Beschreibung von Glueballs ist.

Das Konzept dieser Arbeit ist das folgende:

- Glueballs werden als zusammengesetzte Teilchen von zwei miteinander wechselwirkenden Gluonen betrachtet.
- Der Einfluß dieser Wechselwirkung wird im Rahmen der störungstheoretischen QCD und unter Berücksichtigung von Konfigurationsmischungen berechnet.
- Die physikalischen Massen von Glueballs werden damit entsprechend dem in dieser Arbeit weiterentwickelten Bag-Modell errechnet.
- Unter Berücksichtigung von Mischungen zwischen Glueballs und gewöhnlichen Mesonen lassen sich Vorhersagen über Erzeugungsraten in bestimmten Reaktionen, sowie über Zerfallsbreiten und Lebensdauer dieser Zustände treffen.

Neu an dieser Strategie ist zum einen die Berücksichtigung von virtuellen, angeregten Zuständen der beiden Gluonen im Glueball, was eine quasi-dynamische Beschreibung



der Wechselwirkung erlaubt. Zum anderen wird, wie schon erwähnt, eine verbesserte Form des MIT-Bag Modells verwendet, welches zusätzliche Grundzüge der QCD beinhaltet und insofern realistischer als das ursprüngliche Modell sein sollte.

Die wesentlichen Ergebnisse der Untersuchung von Glueballs im Rahmen dieses Modells sind :

1. Massenspektrum:

Der leichteste Glueball trägt die Quantenzahl $J^{PC} = 0^{++}$ (Drehimpuls J , Parität P , Ladungspartität C) und hat eine Masse von weniger als 1 GeV, gefolgt von mindestens 4 weiteren Zuständen im Massenbereich 1-2 GeV. Die Struktur des Spektrums der niedrig liegenden Glueballs mit Quantenzahlen J^{PC} ergibt sich im Groben wie folgt:

$$M(0^{++}) < M(0^{-+}) < M(2^{++}) < M(2^{-+})$$

Dies ist in Übereinstimmung mit den allgemeinen Erwartungen.

2. Mischungen zwischen Glueballs und $q\bar{q}$ -Mesonen:

Die Untersuchung der Mischung zwischen den pseudoskalaren Mesonen $\eta(549)$, $\eta'(958)$ und dem hoffnungsvollsten Glueball Kandidaten $\iota(1440)$ impliziert einen signifikanten Quarkgehalt von etwa 25% im ι -Teilchen und außerdem knapp 20% gluonische Beimischungen im η' -Meson.

3. Zerfallseigenschaften von Glueballs:

Die Mischung zwischen $q\bar{q}$ -Mesonen und Glueballs führt i.a. auf erstaunlich große Zerfallsbreiten für die Strahlungserfälle von Glueballs. Speziell finden

wir für das ι -Teilchen eine Breite im elektromagnetischen Zerfall $\iota \rightarrow \rho + \gamma$ von $\Gamma \approx 500 \text{ KeV}$, wohingegen der Zerfall $\iota \rightarrow 2\gamma$ eine Breite von $\Gamma \approx 3 \text{ KeV}$ ergibt.

4. Produktionsmechanismen:

Die Analyse der Produktion von Glueballs in den Zerfällen des schweren Mesons J/ψ ist für die Identifizierung solcher gluonischer Zustände von großer Bedeutung. Speziell finden wir z.B. in den Strahlungszерfällen des J/ψ -Mesons eine immens große Produktionsrate für den Glueball Kandidaten ι , sowie ein deutliches Gewicht des Zerfallskanals $J/\psi \rightarrow \omega + \iota$ in der Gesamtzerfallsbreite des J/ψ .

1.2 Aufbau und Gliederung der Arbeit

Bei der Konzeption dieser Arbeit wurde Wert darauf gelegt, daß auch Leser, die mit dem speziellen Gebiet der QCD nicht so vertraut sind, einen Zugang haben.

Wir haben daher versucht, einerseits die phänomenologischen Gesichtspunkte der Untersuchung von Glueballs deutlich herauszustellen, andererseits aber auch die notwendigen allgemeinen theoretischen Grundlagen in möglichst verständlicher Form aufzunehmen, so daß diese Arbeit als in sich geschlossen angesehen werden kann. Zur Ergänzung verweisen wir an Ort und Stelle auf vertiefende

Literatur und spezielle Publikationen.

In Anbetracht des Umfangs dieser Arbeit und mit dem Anliegen, stets den roten Faden erkennbar zu machen, haben wir die Arbeit in mehrere Teile gegliedert, die zwar zusammengehören, aber dennoch voneinander unabhängig gelesen werden können (siehe Figur 1.1):

- Kapitel 2 bildet eine Einheit für sich und dient als Einstieg, indem hier ein Überblick über den derzeitigen Stand der Glueball-Forschung gegeben wird.
- Kapitel 3 und 4, zusammen mit den detaillierten Ausführungen im Anhang, stellen das mathematische und theoretische Rüstzeug zur Verfügung.
- Kapitel 5, 6 und 7 schließlich bilden das Kernstück und beinhalten die ausführliche Untersuchung von Glueballs und Hadronen im Rahmen unseres Modells.

Überblick

Kapitel 2:

Glueballs und QCD

Theoretische Basis

Kapitel 3:

Klass. Chromodynamik und
kanonische Quantisierung

Kapitel 4:

QCD in einer sphärischen
Kavität - Feynman Regeln

Anhang :

Berechnung der verschiedenen
Wechselwirkungen zwischen Quarks
und Gluonen in einer sphärischen
Kavität - Konkrete Anwendung
der Feynman-Regeln

Phänomenologie und Anwendung

Kapitel 5:

Grundzüge des Modells

Kapitel 6:

Anwendung des Modells -
Massenspektren und statische Eigen-
schaften von Hadronen und Glueballs

Kapitel 7:

Anwendung des Modells -
 η - η' - ι Mischung
Zerfalleigenschaften und Produktions-
mechanismen von Glueballs

Figur 1.1 :

Wegweiser zum Aufbau dieser Arbeit

Im einzelnen ist die Gliederung und der wesentliche Inhalt der Kapitel wie folgt:

In Kapitel 2 geben wir einen Überblick über den augenblicklichen Stand der Glueball-Forschung. Wir diskutieren die experimentelle Situation und die Rolle von Glueballs in der Elementarteilchenphysik. Anschließend werden kurz die Charakteristika verschiedener theoretischer Modelle zur Beschreibung von Glueballs im Rahmen der QCD erläutert.

Kapitel 3 und 4 bilden das theoretische Fundament dieser Arbeit und stellen das mathematische Handwerkszeug bereit, das wir für die quantitative Untersuchung von Glueballs und Hadronen benötigen.

In Kapitel 3 geben wir eine kurze, zusammenfassende Einführung in die QCD. Wir starten von der klassischen, nichtabelschen Eichtheorie ('Chromodynamik') und quantisieren die Theorie in manifest kovarianter Weise. Im Gegensatz zu der üblichen Methode der Pfadintegral-Formulierung, verwenden wir das traditionelle Konzept der kanonischen Quantisierung für die vor einigen Jahren eine adäquate Verallgemeinerung für nichtabelsche Eichtheorien entwickelt wurde (Ku 79). Mit dem Ziel eine relativistisch invariante und lokale Hamilton-Formulierung der Theorie zu entwickeln, die eine konsistente Quantisierung erlaubt, brechen wir die klassische Eichinvarianz und führen sogenannte Geister-Felder ein. Um die verlorengegangene Eichinvarianz wiederherzustellen, stellen wir eine neue Eichsymmetrie vor, die als die quantentheoretische Version der klassischen Eichinvarianz angesehen werden kann und auf den sogenannten Becchi-Rouet-Stora (BRS) Transformationen beruht.

Damit läßt sich die klassische Theorie widerspruchsfrei quantisieren und eine

wohldefinierte Hamiltondichte, (Anti-) Vertauschungsrelationen und Bewegungsgleichungen für die Quark-, Gluon- und Geister-Felder ableiten.

In Kapitel 4 verwenden wir dieses verallgemeinerte Konzept zur Formulierung der QCD innerhalb eines beschränkten Raumbereichs, der Kavität. Wir stellen kurz das Gell-Mann-Low Theorem vor und führen darauf aufbauend eine Störungsentwicklung der *räumlich beschränkten (!)* QCD durch. Die signifikanten Unterschiede und die Gemeinsamkeiten gegenüber der *freien* QCD werden erläutert. Ein weiterer grundlegender Aspekt ist die Definition 'physikalischer Zustände' mit nichtnegativer Norm, um eine sinnvolle Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Theorie gewährleisten zu können.

Die Essenz dieser Betrachtungen ist die Ableitung von Feynman-Regeln für die QCD innerhalb einer sphärischen Kavität, die eine rigorose und übersichtliche Berechnung der Wechselwirkung von in der Kavität eingesperrten Quarks, Gluonen und Geistern ermöglichen. Wir erläutern diese Techniken anhand zweier illustrativer Beispiele der Quark-Antiquark und Gluon-Gluon Wechselwirkung.

Kapitel 5, 6 und 7 sind das Herzstück dieser Arbeit und behandeln die konkrete Anwendung der entwickelten Techniken zur quantitativen Beschreibung von Glueballs und Hadronen sowie deren Eigenschaften im Rahmen der QCD.

In Kapitel 5 stellen wir unser Modell vor. Wie schon erwähnt, verwenden wir das ursprüngliche MIT-Bag Modell als Grundlage und erweitern es dahingehend, daß wir einerseits zusätzliche fundamentale Eigenschaften der QCD (wie eine 'gleitende Kopplungskonstante' und 'Selbstenergie-Korrekturen') einbauen, und andererseits wichtige Aspekte allgemeiner quantentheoretischer Natur (wie 'Konfigurationsmischungen', d.h. virtuelle Teilchenanregungen, sowie

'Korrekturen zur Schwerpunktbewegung') berücksichtigen. Zur Übersichtlichkeit fassen wir unser Konzept zur Beschreibung von Glueballs und Hadronen in Gestalt einer Formelsammlung zusammen.

In Kapitel 6 diskutieren wir ausführlich die quantitativen Ergebnisse unseres Modells, sowie deren phänomenologische Konsequenzen. Wir verwenden experimentelle Informationen aus der wohletablierten Hadronspektroskopie, um die freien Parameter unseres Modells ein für alle Mal festzulegen und testen unser Konzept, indem wir das Spektrum der Mesonen und Baryonen sowie deren statische Eigenschaften berechnen. Wir erhalten plausible Werte für die Parameter des Modells und finden eine ausgezeichnete Übereinstimmung unserer danach getroffenen Vorhersagen mit experimentellen Daten, so daß wir das Modell als vertrauenswürdige Basis zur Beschreibung auch von Glueballs ansehen können. Anschließend führen wir eine detaillierte Analyse der Glueballs im Rahmen unseres Modells durch und treffen definitive Vorhersagen für das Massenspektrum. Außerdem diskutieren wir ausführlich die Gluon-Gluon Wechselwirkung im Vergleich zur Wechselwirkung zwischen Quarks, mit dem Ziel, die signifikanten Unterschiede von Hadronen und Glueballs sowohl anschaulich als auch quantitativ zu verstehen.

In Kapitel 7 schließlich, verwenden wir diese Resultate, um die Zerfallseigenschaften und Produktionsmechanismen von Glueballs zu studieren. Speziell greifen wir das in letzter Zeit viel diskutierte ι -Teilchen heraus, das als prima facie Glueball Kandidat gilt. Wir formulieren ein 'Mischungs-Modell' zur Beschreibung von Mischungen zwischen den pseudoskalaren Mesonen $\eta(549)$, $\eta'(958)$ und dem besagten $\iota(1440)$. Unsere berechneten Mischungsverhältnisse sind in guter Übereinstimmung mit derzeit verfügbaren experimentellen Daten.

Basierend auf der sogenannten 'Vektor-Dominanz Hypothese' des Quark-Modells und unter Verwendung unserer berechneten Mischungen zwischen η , η' und ι treffen wir konkrete Vorhersagen für die elektromagnetischen und die 2-Photon Zerfälle dieser Teilchen. Abschließend diskutieren wir die Produktion des ι -Teilchens in den Zerfällen des schweren Mesons J/ψ , auf deren experimentelle Erkenntnisse sich die Interpretation des ι -Teilchens als ein Glueball in erster Linie stützt. Wir berechnen die Produktionsraten von η , η' und ι über die Zerfallsbreiten des J/ψ und machen Vorhersagen über bisher noch nicht befriedigend oder garnicht gemessene Zerfallskanäle des J/ψ in die pseudoskalaren Teilchen η , η' und ι .

Diese Betrachtung rundet die Analyse von Glueballs im Rahmen unseres Modells ab und unterstreicht die vielseitige Anwendbarkeit des verfolgten Konzepts.

Der Anhang enthält die Details unserer Berechnungen der Wechselwirkungen zwischen Quarks und Gluonen und erläutert die rigorose Umsetzung der Feynman-Regeln aus Kapitel 4 in analytische Ausdrücke für die Wechselwirkungs-Amplituden zur numerischen Auswertung.

In Anhang A bestimmen wir die Eigenmoden von Quarks, Gluonen und Geistern, die innerhalb einer statischen Kavität eingesperrt sind. Diese (ungestörten) Eigenmoden genügen den Bewegungsgleichungen der nicht-wechselwirkenden Teilchenfelder sowie den Randbedingungen der Kavität und werden zur Entwicklung der entsprechenden Feldoperatoren in eine vollständige Basis verwendet.

In Anhang B sind darauf aufbauend die expliziten Ausdrücke für die Propaga-

toren und die effektiven Vertexfunktionen der Feynman-Regeln aus Kapitel 4 zusammengestellt, welche die elementaren Bausteine zur Berechnung der Ausbreitung und Wechselwirkung von Quarks, Gluonen und Geistern innerhalb der Kavität darstellen.

In Anhang C erläutern wir die explizite Konstruktion von 'physikalischen Zuständen', die aus Quarks und Gluonen zusammengesetzt sind und den 'Physikalitätskriterien' aus Kapitel 4 genügen. Des weiteren führen wir im Detail die Berechnung der Wechselwirkungs-Amplituden und Matrixelemente zwischen 'physikalischen' Quark-Antiquark-, 3-Quark- und Gluon-Gluon-Teilchenzuständen vor.

In Anhang D skizzieren wir die Auswertung der farbelektrischen Kopplung wechselwirkender Quarks und Gluonen und berechnen deren Erwartungswerte für die verschiedenen Wechselwirkungsprozesse aus Anhang C.

In Anhang E schließlich ist die in dieser Arbeit verwendete Notation zusammengefaßt.

2 Glueballs und QCD

Dieses Kapitel gibt einen Überblick des derzeitigen Kenntnisstands über die Rolle der QCD und der Glueballs in der Elementarteilchen-Spektroskopie. Die experimentelle Situation wird diskutiert und verschiedene theoretische Modelle sowie deren Vorhersagen werden vorgestellt.

2.1 QCD-Vorstellungen der starken Wechselwirkung

Das Ziel der Teilchenphysik ist es einerseits, die Grundbausteine zu finden aus denen sich Teilchen wie Nukleonen, Mesonen usw. zusammensetzen lassen, andererseits die Kräfte zwischen diesen Teilchen zu untersuchen. Nach dem heutigen Stand des Wissens sind diese Grundbausteine die Quarks und die Leptonen. Für die Kräfte zwischen den Grundbausteinen sind drei Wechselwirkungen von Bedeutung: die schwache, die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung. Nach dem heute generell akzeptierten Bild der Feldtheorie kommen diese Kräfte durch den Austausch von (virtuellen) Mittlerteilchen zustande: Photonen für die elektromagnetische Wechselwirkung, $W^\pm$ - und Z^0 -Bosonen für die schwache Wechselwirkung und Gluonen für die starke Wechselwirkung. Während die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung im Rahmen der Quantenelektrodynamik (QED) und der Glashow-Salam-Weinberg

Theorie der schwachen Wechselwirkung auch quantitativ als gut verstanden gelten, ist die Rolle der Quantenchromodynamik (QCD) als entsprechende Theorie für die starke Wechselwirkung noch nicht vollständig geklärt. Allerdings gilt die QCD als hoffnungsvoller Kandidat, diejenige Theorie zu sein, die der starken Wechselwirkung zugrunde liegt, da sie es ermöglicht, zahlreiche experimentell beobachtete Eigenschaften der stark wechselwirkenden Teilchen zumindest qualitativ zu beschreiben.

Die wesentlichen Grundzüge der Physik der stark wechselwirkenden Teilchen im Rahmen der QCD lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- *Hadronen* sind zusammengesetzte Objekte, die im wesentlichen aus drei Quarks bzw. Antiquarks (Baryonen) oder einem Quark-Antiquark Paar (Mesonen) bestehen.
- Die *Quarks* (q) bzw. *Antiquarks* ($\bar{q}$) haben Flavourfreiheitsgrade (up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b),...) und jeweils drei Farbfreiheitsgrade. Jedes Quark existiert in drei Farbversionen und bildet die fundamentale Triplettdarstellung $\{3\}$ der Farb-Symmetriegruppe $SU(3)_{Color}$. Der Übergang von der globalen $SU(3)_{Color}$ -Symmetrie zu einer lokalen Symmetrie, d.h. der Forderung nach Invarianz der Theorie unter lokalen Eichtransformationen der $SU(3)_{Color}$, führt auf eine Theorie, welche die Dynamik von wechselwirkenden Quarks und Gluonen beschreibt - die Quantenchromodynamik (QCD).
- Die *Gluonen* (g) sind - analog zu den Photonen der QED - die Mittlerteilchen der Wechselwirkung zwischen den Quarks und tragen ebenfalls Farbladung. Sie bilden die Oktettdarstellung $\{8\}$ der $SU(3)_{Color}$, d.h. es gibt acht 'doppelfarbige' Gluon-Zustände.

- Die *Stärke der Wechselwirkung* zwischen den farbelektrisch geladenen Quarks und Gluonen wird durch eine 'gleitende Kopplungskonstante' bestimmt und ist vom Impulsübertrag der Teilchen abhängig. Für große Impulsüberträge, d.h. kleine Relativabstände ist die Kopplung der Teilchen gering. Im Grenzfall sehr großer Energien verhalten sich die Teilchen quasi frei (*asymptotische Freiheit*). Diese Eigenschaft ist konsistent mit der experimentellen Beobachtung des sogenannten 'Scaling-Verhaltens' der Partonen tiefinelastischer Elektron-Nukleon-Streuung.
- Alle beobachteten *Hadronen sind Farbsinglets* $\{1\}$ der $SU(3)_{Color}$, d.h. ihre Wellenfunktionen sind invariant unter 'Rotationen im Farbladungsraum'. Diese Eigenschaft der Eichinvarianz ist in Einklang mit der experimentellen Tatsache, daß Quarks und Gluonen nicht zum physikalischen Spektrum gehören, also nicht als freie Teilchen existieren. Als farbelektrisch geladene Teilchen ist ihr Aufenthaltsbereich auf das Innere der Hadronen beschränkt (*Farb-Confinement*).
- Die *Quark- und Gluon-Freiheitsgrade* lassen sich als innere Freiheitsgrade für das niederenergetische Anregungsspektrum der hadronischen Materie auffassen.

2.2 Glueballs und Hybride

Eine wichtige Rolle bei der Verifizierung der QCD spielen gebundene Zustände aus Gluonen (*Glueballs*) bzw. aus Gluonen und Quark-Antiquark Paaren (*Hybride*), die nur von der QCD vorhergesagt werden: Da nämlich die Gluonen - im Gegensatz zu

den Photonen in der QED - selbst Ladung (Farbe) tragen und daher auch untereinander wechselwirken, sind neben den gewöhnlichen hadronischen Quark-Antiquark und 3-Quark Verbindungen auch gebundene Systeme möglich, die aus reellen ('consistent') Gluonen oder aus Gluonen und Quark-Antiquark Paaren bestehen.

Präziser gesagt:

- *Glueballs* sind quarklose Zustände die aus 2, 3 oder mehr reellen Gluonen bestehen.
- *Hybride* sind aus einem Quark-Antiquark Paar und einem reellen Gluon zusammengesetzt.

Glueballs und Hybride werden unter dem Begriff *exotische Teilchen* zusammengefaßt. Ein eindeutiger Nachweis dieser exotischen Teilchen wäre ein gewichtiges Argument für die Richtigkeit der QCD-Vorstellungen der starken Wechselwirkung. Umgekehrt, die definitive Nicht-Existenz solcher Teilchen zwänge dazu das bisherige Bild der starken Wechselwirkung und der zugrundeliegenden QCD-Prinzipien zu revidieren. Dieser Zusammenhang unterstreicht die Schlüsselrolle, die Glueballs und Hybride für die QCD als Theorie der starken Wechselwirkung spielen.

In den letzten Jahren sind in verschiedenen Experimenten und an verschiedenen Beschleunigern im Massenbereich zwischen 1000 und 2500 MeV/c² kurzlebige Teilchen gefunden worden, mit charakteristischen Eigenschaften (z.B. kleine Massenunschärfen), die sie von den gewöhnlichen $q\bar{q}$ -Mesonen unterscheiden und die mit denen von Glueballs übereinstimmen. Diese Teilchen sind daher gute Kandidaten für solche Zustände.

Man charakterisiert die Teilchen durch die Quantenzahlkombinationen J^{PC} (J = Drehimpuls, P = Parität, C = Ladungsparität) sowie durch ihre Masse. Zum Beispiel

ist für das 2-Gluon-System (gg) im Grundzustand der relative Bahndrehimpuls der beiden Gluonen $L = 0$ und der Gesamtspin $S = 0$ antiparallele Spineinstellung $\uparrow\downarrow$). Der Grundzustand des gg -Glueballs ist also durch $J = L + S = 0$, $P = (-1)^L = +1$ und $C = (-1)^{L+S} = +1$, d.h. durch $J^{PC} = 0^{++}$ gekennzeichnet.

Figur 2.1 zeigt eine Übersicht über experimentell gefundene Kandidaten für exotische Teilchen, unter Angabe der Quantenzahlen J^{PC} und Massen, sowie daneben das Spektrum der Mesonen-Resonanzen im Massenbereich bis $2.5 \text{ GeV}/c^2$. Im gleichen Massenbereich gibt es eine Vielzahl von Hinweisen auf weitere exotische Zustände. Da deren Quantenzahlen bisher noch nicht eindeutig geklärt sind, sind sie hier nicht aufgeführt.

Der Grund, warum bis heute noch keine absolut eindeutige Identifizierung von Glueballs oder Hybriden möglich ist, liegt darin, daß die bisher gefundenen Kandidaten *keine* exotischen Quantenzahlen tragen und deshalb Verwechslungen oder sogar Mischungen mit einem normalen $q\bar{q}$ -Zustand nicht auszuschließen sind. Um das zu verdeutlichen, ist in Figur 2.1 neben dem Spektrum der möglicherweise exotischen Teilchen (linke Spalte) auch das Spektrum der meisten bisher bekannten $q\bar{q}$ -Mesonen im Massenbereich bis $2.5 \text{ GeV}/c^2$ wiedergegeben. Dabei ist versucht worden, die Mesonen entsprechend der Vorhersagen des Quark-Modells in Nonetts einzuordnen, die jeweils neun Teilchen mit gleichem J^{PC} enthalten (Beschränkung auf $q\bar{q}$ -Paare mit $L \leq 1$). Es wird daraus ersichtlich, daß für viele der vom Quark-Modell vorhergesagten radialen Anregungen (gekennzeichnet durch Index R) noch keine Kandidaten bekannt sind. Selbst die Interpretation der Grundzustände ist nicht eindeutig: So fehlt z.B. noch ein Kandidat im Massenbereich von $1.2 \text{ GeV}/c^2$ im 1^{+-} Nonett und es ist nicht klar, welche Zusammensetzungen die meisten der 0^{++} -Zustände haben.

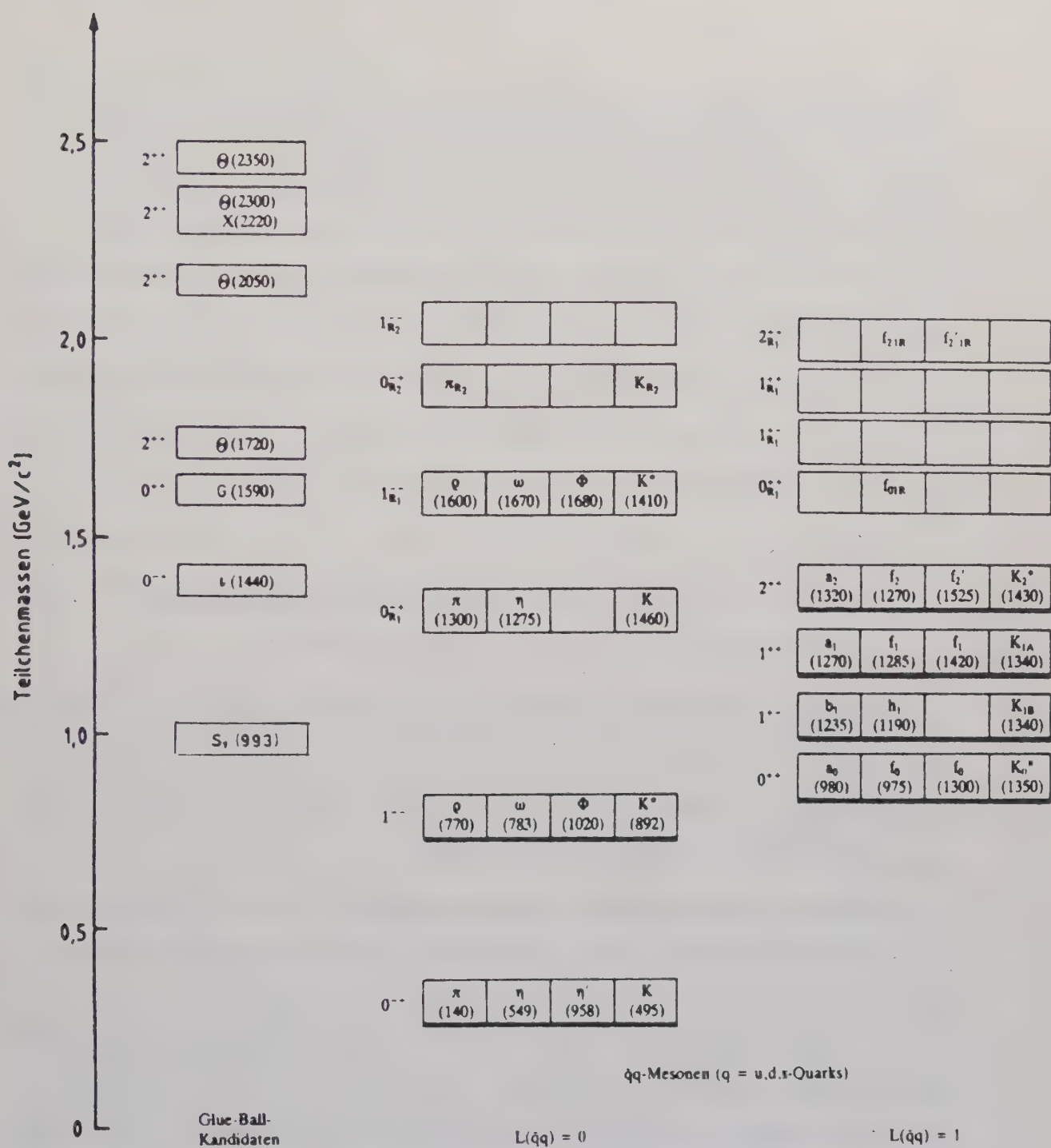
Nach Figur 2.1 wäre es möglich, einige der Glueball-Kandidaten in noch nicht vollständig

besetzte Nonetts einzuordnen und so diese Zustände als normale $q\bar{q}$ -Mesonen zu erklären. So könnte z.B. das $\iota(1440)$ -Teilchen das noch fehlende ($L=0$)-Meson im $0_{R_1}^{-+}$ -Nonett sein. Berücksichtigt man jedoch neben der Masse noch andere Eigenschaften der Teilchen (Lebensdauer, Zerfallsmoden, Erzeugungsraten usw.), so wird eine solche Zuordnung sehr unwahrscheinlich und bestätigt den exotischen Charakter der unter Glueball-Kandidaten aufgeführten Zustände.

Figur 2.1 :

Übersicht über die experimentell gefundenen Kandidaten für exotische Mesonen-Resonanzen (nur $L \leq 1$). Die Kästchen entsprechen jeweils einem Nonett von Teilchen. Nach Ladungszuständen ist nicht differenziert; π steht so z.B. für die drei Teilchen π^+ , π^- , π^0 . Aus Gründen der Übersicht sind alle Mitglieder eines Nonetts, die nicht immer die gleiche Masse haben, bei einem mittleren Massenwert zusammengefaßt. Die Grundzustände der $q\bar{q}$ -Systeme (Quark-Spins parallel oder antiparallel) sind durch dicke Unterstreichungen hervorgehoben. Darüber liegen die entsprechenden einfach oder zweifach radial angeregten Niveaus (R_1 bzw. R_2). Für Zustände ohne Eintrag wurde bisher kein Kandidat gefunden.

(Nach Referenz Ko 87).



Diese Betrachtung macht deutlich, daß für die Erkennung exotischer Teilchen besonders solche Eigenschaften wichtig sind, in denen sie sich von normalen $q\bar{q}$ -Mesonen unterscheiden. *Charakteristische Eigenschaften der exotischen Teilchen* sind z.B.:

- Mögliche längere *Lebensdauer* als $q\bar{q}$ -Mesonen ähnlicher Masse, d.h. kleine Massenunschärfen bis herunter zu $10 \text{ MeV}/c^2$.
- *Zerfälle von Glueballs in Mesonen* mit u -, d -, s -Quarks sollten 'Flavour-blind' geschehen, d.h. diese Zerfälle sollten, unabhängig vom Flavour-Gehalt der Mesonen, gleich wahrscheinlich sein (abgesehen von Phasenraum-Faktoren).
- *Strahlungszерfälle*, z.B. $gg \rightarrow \gamma + q\bar{q}$ oder $gg \rightarrow \gamma + \gamma$ sollten unterdrückt sein, da Gluonen keine elektrische Ladung tragen und daher nicht direkt an das elektromagnetische Feld (an die Photonen) koppeln.
- Vorwiegende *Produktion* in 'Gluon-reichen' Reaktionskanälen, wie z.B. den Zerfällen des J/ψ -Mesons, in denen die Reaktionsdynamik in erster Linie durch Gluonen bestimmt wird und nicht, wie in den meisten hadronischen Reaktionen, durch die Wechselwirkung der beteiligten Quarks.
- Mögliche *exotische Quantenzahlkombinationen* J^{PC} , die für $q\bar{q}$ -Systeme aus Symmetriegründen verboten sind, so z.B. 0^{--} , 0^{+-} , 1^{-+} , ... (*Odd Balls*).

Der erste Punkt basiert auf dem Argument (Ro 77), daß Reaktionen, welche die *OZI*-Regel (Ok 63, Zw 64, Li 66) verletzen, vor allem durch Glueballs als intermediäre Zustände vermittelt werden, wie z.B. die J/ψ -Zerfälle (vgl. Punkt 4). Die Anwendung dieser Idee - auch als $\sqrt{OZI}$ -Regel bezeichnet - führt auf die Abschätzung, daß typische Resonanzbreiten von Glueballs in der Größenordnung $10 - 30 \text{ MeV}/c^2$ liegen sollten.

Der letzte Punkt ist von besonders großer Bedeutung für die Identifizierung von exotischen Teilchen. Der experimentelle Nachweis von Zuständen mit solchen Quantenzahlen wäre ein unumstößlicher Beweis für die Existenz von exotischen Teilchen. Es ist allerdings ausdrücklich zu betonen, daß Mischungen zwischen gluonischen und quarkonischen Zuständen sowie andere dynamische Effekte dieses einfache Bild von typischen Signaturen für Glueballs wesentlich abändern können. Die Auswirkungen solcher Mischungseffekte werden in Kapitel 7 eingehend untersucht.

2.3 Theoretische Glueball-Modelle

Die im vorangegangenen Abschnitt gegebene Übersicht über die experimentellen Erkenntnisse über Glueballs macht deutlich, wie wichtig eine detaillierte theoretische Untersuchung von Glueballs im Rahmen der QCD ist. Wie schon mehrfach betont, ist die mögliche Existenz von Glueballs eine einzigartige Konsequenz der Grundprinzipien der QCD. Aufgabe ist es daher, möglichst viele charakteristische Eigenschaften von Glueballs aus der Theorie abzuleiten, um eine eindeutige Identifizierung der bisher experimentell gefundenen Kandidaten als Glueballs oder aber als normale $q\bar{q}$ -Mesonen zu ermöglichen.

Die Suche nach Glueballs erfordert also einen 'Steckbrief':

- Welche Quantenzahlen haben die Glueball-Zustände?
- Wie sieht die Struktur des Massenspektrums aus?

- Was sind charakteristische Zerfallseigenschaften von Glueballs?
- Wie sehen die Mechanismen zur Erzeugung derartiger Zustände aus?

Theoretische Vorhersagen über das Massenspektrum und die typischen Quantenzahlen J^{PC} von Glueballs lassen sich ganz analog zur Erklärung des Spektrums der Baryonen und Mesonen treffen.

Wie bei den Hadronen ist man gezwungen, auf approximative Lösungsansätze zurückzugreifen, weil das Problem des *Confinements* mangels einer exakten Lösung der QCD-Bewegungsgleichungen bisher nicht gelöst ist. Allerdings wurden in der Klärung dieser Frage in den letzten Jahren mittels Gitterrechnungen beachtliche Fortschritte erzielt. Die experimentelle Tatsache des Confinements - nämlich das Phänomen, daß Farbladung tragende Teilchen nicht frei zu existieren scheinen, sondern nur in Form gebundener Farbsinglett-Systeme auftreten - muß daher *von Hand* in die theoretische Formulierung eingefügt werden, d.h. abgesehen von äußerst aufwendigen Gitterrechnungen ist man auf phänomenologische Modelle angewiesen.

Natürlich ist eine solche phänomenologische Beschreibung unbefriedigend, insbesondere insofern, als die Eigenschaft des Confinements wahrscheinlich schon in der Theorie selbst enthalten und nur bisher nicht verstanden ist.

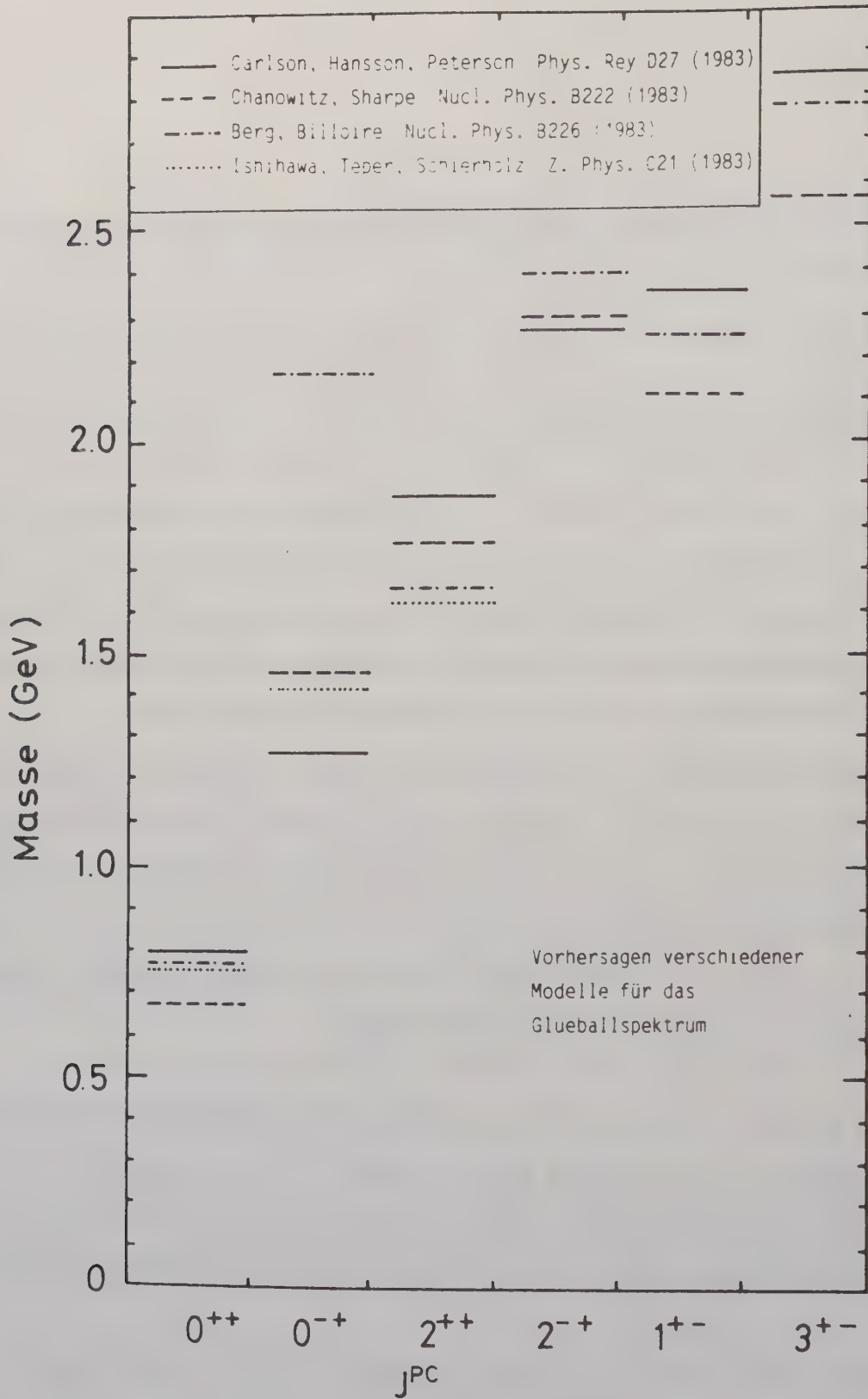
Das Confinement von Quarks und Gluonen läßt sich auf verschiedene Arten erreichen, was sich in der Unterschiedlichkeit der Lösungsansätze äußert. Die verbreitetsten Modelle sind:

- *Bag Modelle*: Quarks und Gluonen werden in ein kleines Raumvolumen mit Radius $R \sim 1 \text{ fm}$ eingesperrt ('Bag'), das einem physikalischen Farbsinglett-Teilchen entspricht. Dabei wird angenommen, daß von außen ein Vakuumdruck

auf die Bag-Oberfläche wirkt, der die Teilchen zusammenhält und so das Confinement simuliert.

- *Potential-Modelle*: Confinement wird durch ein aus der QCD abgeschätztes Potential für die Wechselwirkung von Quarks und Gluonen erreicht, durch das die Teilchen zusammengehalten werden.
- *QCD Summenregeln*: Die Idee ist, Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen zu bilden, die Strömen entsprechen, welche dieselben Quantenzahlen tragen wie die Glueballs, die untersucht werden sollen. Dann extrapoliert man von der Region großer Impulsüberträge hin zu kleinen Impulsen, wo nicht-störungstheoretische Effekte bedeutsam werden, die das Confinement erzeugen sollen.
- *Gitter-Eichtheorien*: Gitterrechnungen erlauben, zumindest im Prinzip, den adäquatesten Weg, um nicht-störungstheoretische Aspekte der QCD wie das Confinement zu studieren. Feynman'sche Pfadintegrale werden auf einem diskreten Raum-Zeit Gitter mittels Monte Carlo Simulation berechnet und man untersucht Zwei-Punkt-Korrelationsfunktionen zwischen Operatoren mit Quantenzahlen von möglichen Glueball-Zuständen.

In Figur 2.2 sind die Ergebnisse verschiedener Modellrechnungen für das Massenspektrum von Glueballs zusammengestellt. Zufriedenstellend ist, daß alle Modelle trotz deutlich verschiedener Ansätze die gleiche Größenordnung für die Glueball Massen liefern, was die Glaubwürdigkeit der Vorhersagen verstärkt.



Figur 2.2 :

Massenspektrum der niedrigst liegenden Glueball-Zustände für die angegebenen Quantenzahlen J^{PC} . Die Linien ohne Punkte bezeichnen Bag-Modell Rechnungen, die Linien mit Punkten stehen für Monte Carlo Simulationen auf dem Gitter. (Nach Referenz Ca 84).

Fazit :

Unabhängig von spezifischen Modellannahmen besteht generelle Übereinstimmung darin, daß der leichteste Glueball ein skalarer 0^{++} -Zustand ist, mit einer Masse um 1 GeV, oder etwas darunter, gefolgt von einem pseudoskalaren 0^{-+} -Zustand zwischen 1.2 und 1.5 GeV und den höher liegenden 2^{++} - und 2^{-+} -Zuständen.

Es ist gerade dieser Massenbereich zwischen 0.5 und 2 GeV, der in den letzten 30 Jahren intensiv mit verschiedenen spektroskopischen Methoden erforscht wurde, so daß sich die Frage stellt: *Warum hat man diese Glueball-Zustände noch nicht identifiziert ?* Wie im vorangegangenen Abschnitt angesprochen kann es dafür verschiedene Gründe geben:

1. Glueballs existieren gar nicht. Dies würde bedeuten, die QCD-Vorstellungen müßten komplett überdacht oder zumindest besser verstanden werden.
2. Glueballs existieren, konnten aber bislang nicht identifiziert werden, weil sie mit normalen $q\bar{q}$ -Zuständen mischen und sich daher schwer von letzteren trennen lassen.
3. Einige Glueballs wurden möglicherweise schon beobachtet und lediglich fälschlicherweise als gewöhnliche $q\bar{q}$ -Zustände identifiziert.

Die Schlußfolgerung ist, daß die Massen der Glueballs keine eindeutigen Indizien für diese Zustände sind und daß eine systematische Untersuchung ihrer Zerfalls- und Erzeugungsmechanismen sowie ihrer Mischungsverhältnisse mit $q\bar{q}$ -Mesonen notwendig ist. Mit dieser Aufgabe beschäftigen sich die folgenden Kapitel.

3 Chromodynamik und kovariante Quantisierung

Dieses Kapitel umfaßt die formalen feldtheoretischen Grundlagen, auf denen wir die phänomenologische Beschreibung von Glueballs im Rahmen der QCD aufbauen werden. Ausgangspunkt ist die klassische, nicht-abelsche $SU(3)$ -Eichtheorie (Ya 54, Fr 73). Um eine konsistente, kovariante Quantisierung der klassischen Theorie ('Chromodynamik') durchführen zu können, ist es notwendig, die Eichinvarianz in einer Lorentz-invarianten Weise zu brechen. Dies erfordert die Einführung von sogenannten 'Fadeev-Popov Geistern' (Fa 67) in die Lagrangedichte. Die verlorengegangene klassische Eichinvarianz wird anschließend durch eine verallgemeinerte Eichinvarianz - die sogenannte 'BRS-Invarianz' (Be 74, Be 76) - ersetzt, sodaß die resultierende Quantentheorie insgesamt wieder eichinvariant und somit die Renormierbarkeit der Theorie gewährleistet ist. Die so modifizierte klassische Theorie wird in üblicher Weise der kanonischen Quantisierung unterworfen und führt auf die Quantenfeldtheorie der QCD mit Feldoperatoren, kanonischen Impulsen und entsprechenden Bewegungsgleichungen in manifest kovarianter Form. Der Preis dieser Prozedur ist die Präsenz unphysikalischer Freiheitsgrade. Folglich ist eine strikte Definition physikalischer Zustände notwendig, um eine sinnvolle Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Theorie garantieren zu können.

3.1 Klassische Chromodynamik

Um die im folgenden verwendete Notation festzulegen, beginnen wir mit einer kurzen Einführung in die *Chromodynamik* - die klassische Feldtheorie, die auf der nichtabelschen Eichgruppe $SU(3)_{color}$ basiert. Diese renormierbare Feldtheorie läßt sich aus der folgenden lokal eichinvarianten Lagrangedichte ableiten (Ya 54, Fr 73) :

$$\mathcal{L}_{Class} = \bar{\psi} (i \gamma_{\mu} D^{\mu} - M) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \quad (3.1)$$

Die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen wird bestimmt durch die kovariante Ableitung, die von der Kopplungskonstante g abhängt:

$$D^{\mu} \psi = (\partial^{\mu} - i g \hat{T}^a A^{\mu,a}) \psi \quad (3.2)$$

Die Wechselwirkung der Gluonen untereinander entspringt dem zweiten Term in (3.1), der den farb-elektromagnetischen Feldtensor $F_{\mu\nu}^a$ enthält. Ausgedrückt durch die Gluonenfelder A_{μ}^a gilt:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g f^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c \quad (3.3)$$

Der antisymmetrische Feldstärketensor $F^{\mu\nu,a}$ und die kovariante Ableitung D^{μ} sind durch die 'Bianchi-Identität' verknüpft:

$$[D^{\mu}, D^{\nu}]_- = -i g \hat{T}^a F^{\mu\nu,a} \quad (3.4)$$

In den Gleichungen (3.1)-(3.4) wurde folgende *Notation* eingeführt:

Die Indizes a, b, c stehen für die acht Farbfreiheitsgrade der Gluonen, die f^{abc} sind die Strukturkonstanten der $SU(3)_{color}$, und die $\hat{T}^a = \hat{\lambda}^a / 2$ sind die Generatoren der $SU(3)_{color}$ in der fundamentalen Darstellung mit den üblichen Gell-Mann Matrizen $\hat{\lambda}^a$ (siehe Anhang D).

Das Symbol ψ steht für einen Spaltenvektor, der aus mehreren Quarkfeldern $\psi_{cf\alpha}$ besteht, wobei c, f und α die verschiedenen Farb- ($c = 1, 2, 3$), Flavour- ($f = 1, \dots, 6 \equiv u, d, s, c, b, t$) und Dirac-Indizes ($\alpha = 1, \dots, 4$) bezeichnen. Die Massennatrix M ist bezüglich dieser Indizes diagonal und hängt nur von den verschiedenen Massen der Quarks ab, d.h.

$$M_{cf\alpha, c'f'\alpha'} = \delta_{cc'} \delta_{ff'} \delta_{\alpha\alpha'} \cdot m_f \quad (3.5)$$

wobei m_f die Masse des Quarks mit Flavour f ist.

Die Lagrange-Dichte (3.1) ist, per Konstruktion, invariant unter lokalen Eichtransformationen $\hat{U} = e^{i\hat{T}^a\theta^a(x)}$ der Felder ψ und A_μ^a :

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &= \psi + \delta\psi \\ &= \psi - i\hat{T}^a\theta^a\psi \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} A_\mu^a \rightarrow A_\mu^{a'} &= A_\mu^a + \delta A_\mu^a \\ &= A_\mu^a - \frac{1}{g} \left(\partial_\mu \theta^a - g f^{abc} \theta^b A_\mu^c \right) \end{aligned} \quad (3.6b)$$

Hierbei bezeichnen $\hat{T}^a = \frac{\lambda^a}{2}$ die Generatoren der $SU(3)_{color}$ in der fundamentalen Darstellung und die $\theta^a(x)$ sind Raum-Zeit-abhängige 'Drehwinkel' im Farbladungsraum ($a = 1, \dots, 8$). Die Eichinvarianz der Lagrangedichte (3.1) bedeutet dann:

$$\delta \mathcal{L}_{Class} = 0 \quad (3.6c)$$

3.2 Eichinvarianz und Geisterzustände

Die Lagrangedichte (3.1) ist in dieser Form ungeeignet für eine konsistente Quantisierung der klassischen Eichtheorie. Die Schwierigkeiten der Quantisierung haben ihren Ursprung darin, daß man mehr Variable benutzt als unabhängige Freiheitsgrade vorhanden sind. Das farb-elektromagnetische Feld wird durch die vier Komponenten der Gluonfelder A_μ beschrieben. Tatsächlich haben aber nur die durch (3.3) definierten Feldstärken $F_{\mu\nu}$ physikalische Bedeutung. Letztere genügen der 'Transversalitätsbedingung', d.h. das farb-elektromagnetische Feld besteht nur aus zwei transversalen Komponenten. Die vier Komponenten der Gluonfelder A_μ können dann aber nicht alle als unabhängige Freiheitsgrade behandelt werden; nur die beiden transversalen Komponenten sind als dynamische Variablen zu betrachten. Die beiden anderen Freiheitsgrade, die skalaren und longitudinalen Komponenten von A_μ müssen durch Zwangsbedingungen festgelegt werden.

Mit anderen Worten, um eine konsistente Quantisierung durchführen zu können,

muß man die Eichfreiheit (3.6b) der Gluonfelder A_μ beschränken, indem man eine definitive Eichung festlegt. Das bedeutet aber, daß die Eichinvarianz (3.6a)-(3.6c) der Lagrangedichte (3.1) gebrochen wird. Die Festlegung der Eichung läßt sich dadurch erreichen, indem man zu (3.1) einen *kovarianten Eichfixierungsterm* hinzufügt

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\partial^\mu A_\mu^a \right)^2 \quad (3.7)$$

wobei der Parameter α die Eichung spezifiziert, z.B. $\alpha = 1$ (Feynman-Eichung), $\alpha \rightarrow 0$ (Landau-Eichung). Gl. (3.7) entspricht der 'Transversabilitätsbedingung' an die Gluonfelder A_μ , wobei der Faktor $-1/(2\alpha)$ die Rolle des Lagrange-Multiplikators spielt. Da unter lokalen Eichtransformationen (3.6b)

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{g} D_\mu^{ab} \theta^b \quad (3.8)$$

folgt

$$\delta \mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{g\alpha} \left(\partial^\mu A_\mu^a \right) \left(\partial^\nu D_\nu^{ab} \theta^b \right) \neq 0 \quad (3.9)$$

wobei

$$D_\nu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\nu - g f^{abc} A_\nu^c \quad (3.10)$$

Offensichtlich verschwindet die Variation von $\mathcal{L}_{GF}$ i.a. nicht, so daß $\delta(\mathcal{L}_{Class} + \mathcal{L}_{GF}) \neq 0$. Die Eichinvarianz ist also gebrochen. Die so verlorengegangene Eichinvarianz läßt sich allerdings durch die sogenannte *Becchi-Rouet-Stora (BRS) Invarianz*

(Be 74, Be 76) zurückgewinnen, die als die quantentheoretische Version der klassischen Eichinvarianz angesehen werden kann. Wenn man nämlich erzwingt, daß in (3.9)

$$\partial^\nu D_\nu^{ab} \theta^b \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.11)$$

erfüllt ist, so ist $\mathcal{L}_{GF}$ und damit auch $\mathcal{L}_{Class} + \mathcal{L}_{GF}$ tatsächlich eichinvariant. Diese Zwangsbedingung läßt sich mit Hilfe der Lagrange-Multiplikator Methode in die Lagrangedichte einbauen. Man macht den Ansatz

$$\theta^a(x) = -g \delta\lambda \chi_2^a(x) \quad (3.12)$$

wobei $\delta\lambda$ eine von x unabhängige infinitesimale 'Grassmannzahl' ist und

$$\{ \delta\lambda, \chi_2^a(x) \}_+ = 0 \quad (3.13)$$

Durch Einführung des sogenannten *Fadeev-Popov Geister-Lagrangian* in die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{FP} = i \chi_1^a \left(\partial^\nu D_\nu^{ab} \chi_2^b \right) \quad (3.14)$$

wobei $i \chi_1^a$ die Rolle des Lagrange Multiplikators spielt, gelangt man schließlich mit (3.1), (3.7) und (3.14) zur vollen *effektiven Lagrangedichte* :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \quad (3.15)$$

mit

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi}^i \left(i \gamma^\mu D_\mu^{ij} - M \delta^{ij} \right) \psi^j \quad (3.16)$$

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu, a} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} \left(\partial^\mu A_\mu^a \right)^2 \quad (3.18)$$

$$\mathcal{L}_{FP} = i \left(\partial^\mu \chi_1^a \right) \left(D_\mu^{ab} \chi_2^b \right) \quad (3.19)$$

Dabei wurde $\mathcal{L}_{Class} \equiv \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G$ in den fermionischen Anteil ($\mathcal{L}_F$) und den gluonischen Anteil ($\mathcal{L}_G$) aufgespalten. Die kovariante Ableitung D_μ^{ij} bzw. D_μ^{ab} in der fundamentalen bzw. adjungierten Darstellung ist durch (3.2) bzw. (3.10) definiert. Mit dem Ansatz (3.12) transformieren sich die Felder ψ und A_μ^a unter lokalen Eichtransformationen (3.6) nun wie folgt :

$$\delta\psi = \delta\lambda \left(i g \hat{T}^a \chi_2^a \right) \psi \quad (3.20a)$$

$$\delta A_\mu^a = \delta\lambda \left(D_\mu^{ab} \chi_2^b \right) \quad (3.20b)$$

Offensichtlich ist der klassische Lagrangian $\mathcal{L}_{Class} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G$ nach wie vor invariant unter den Transformationen (3.20). Der springende Punkt ist nun, daß man von den Geister-Feldern χ_1, χ_2 ein Transformationsverhalten verlangt, derart daß auch die Summe ($\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$) eichinvariant ist, d.h. man fordert:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \delta (\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}) \\
&= -\frac{1}{\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a) (\partial^\nu \delta A_\nu^a) + i (\partial^\mu \delta \chi_1^a) D_\mu^{ab} \chi_2^b + i \partial^\mu \chi_1^a \delta (D_\mu^{ab} \chi_2^b)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Diese Bedingung wird erfüllt, falls

$$\delta \chi_1^a = i \delta \lambda \frac{1}{\alpha} \partial^\mu A_\mu^a \tag{3.22a}$$

$$\delta \chi_2^a = -\frac{1}{2} \delta \lambda g f^{abc} \chi_2^b \chi_2^c \tag{3.22b}$$

Fazit: Unter den lokalen Eichtransformationen (3.20) und (3.22) bleibt die Kombination $(\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP})$ invariant, d.h. $\delta(\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}) = 0$. Da der klassische Lagrangian $\mathcal{L}_{Class} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G$ selbst ebenfalls invariant unter diesen Transformationen ist, d.h. $\delta(\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G) = 0$, folgt, daß der volle Lagrangian (3.19) ebenfalls invariant ist:

$$\delta \mathcal{L} = \delta (\mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}) = 0$$

Damit besitzt der volle Lagrangian $\mathcal{L}$ eine neue *Symmetrie unter den erweiterten Eichtransformationen* (3.20) und (3.22), obwohl er die klassische Eichinvarianz verletzt. Diese erweiterten lokalen Eichtransformationen sind als die quantentheoretische Version der klassischen Eichtransformationen anzusehen und werden als *BRS (Becchi-Rouet-Stora)-Transformationen* bezeichnet.

Um das Konzept noch einmal klar herauszustellen, fasse ich noch einmal die einzelnen Schritte zusammen:

Der klassische Lagrangian $\mathcal{L}_{Class}$ (3.1) eignet sich nicht zur Quantisierung der Theorie, da er überzählige Freiheitsgrade enthält. Um diese zu eliminieren wurde der Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{GF}$ (3.7) eingeführt. Dadurch ging allerdings die Eichinvarianz verloren. Durch Hinzufügen des Fadeev-Popov Geister-Lagrangian $\mathcal{L}_{FP}$ (3.14) ließ sich jedoch eine neue lokale Eichinvarianz des vollen Lagrangian $\mathcal{L}$ (3.15) unter den erweiterten Transformationen (3.20) und (3.22) gewinnen.

Auf diese Weise hat man nun eine Theorie zur Verfügung, die

1. manifest kovariant ist,
2. eine konsistente Quantisierung erlaubt,
3. aufgrund ihrer lokalen Eichinvarianz die Renormierbarkeit sicherstellt.

In einer konsistenten Feldtheorie müssen alle in der Lagrangedichte auftretenden Felder als dynamische Freiheitsgrade behandelt werden. Nach der Quantisierung sind diese Felder als entsprechende Teilchen zu interpretieren. Das bedeutet aber, daß die Lagrangedichte (3.15) eine *Theorie wechselwirkender Quarks, Gluonen und neuartiger Geisterzustände* beschreibt. Dies wird offensichtlich, wenn man den Lagrangian in einen freien Anteil $\mathcal{L}^o$ und einen Wechselwirkungsanteil $\mathcal{L}^{int}$ aufspaltet:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^o + \mathcal{L}^{int} \quad (3.23)$$

Der freie, von der Kopplungskonstanten g unabhängige Beitrag ist

$$\mathcal{L}^o = \mathcal{L}_F^o + \mathcal{L}_G^o + \mathcal{L}_{FP}^o$$

wobei

$$\mathcal{L}_F^o = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi$$

$\Rightarrow$ Quark-Propagator:



$$\mathcal{L}_G^o = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{\nu,a} - \partial^\nu A^{\mu,a}) - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a)^2$$

$\Rightarrow$ Gluon-Propagator:



$$\mathcal{L}_{FP}^o = i (\partial^\mu \chi_1^a) (\partial_\mu \chi_2^a)$$

$\Rightarrow$ Geister-Propagator:



(3.24)

Der Wechselwirkungsanteil enthält alle von g abhängigen Terme:

$$\mathcal{L}^{int} = \mathcal{L}_{q\bar{q}g} + \mathcal{L}_{3g} + \mathcal{L}_{4g} + \mathcal{L}_{g\chi_1\chi_2}$$

mit

$$\mathcal{L}_{q\bar{q}g} = g \bar{\psi} (\hat{T}^a \gamma^\mu) \psi A_\mu^a$$

$\Rightarrow$ Quark-Gluon Vertex:



$$\mathcal{L}_{3g} = -\frac{1}{2} g f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A^{\mu,b} A^{\nu,c}$$

$\Rightarrow$ 3-Gluon Vertex:



$$\mathcal{L}_{4g} = -\frac{1}{4} g^2 f^{abe} f^{cde} A_\mu^a A_\nu^b A^{\mu,c} A^{\nu,d}$$

$\Rightarrow$ 4-Gluon Vertex:



$$\mathcal{L}_{g\chi_1\chi_2} = -i g f^{abc} (\partial^\mu \chi_1^a) \chi_2^b A_\mu^c$$

$\Rightarrow$ Gluon-Geist Vertex:



(3.25)

Dies einzelnen Terme in (3.24) entsprechen den Propagatoren für die Quarks, Gluonen und Geister, die Terme in (3.25) dagegen beschreiben die Quark-Gluon, Gluon-Gluon und Gluon-Geist Wechselwirkung. Diese physikalische Interpretation der einzelnen Bausteine wird durch die nebenstehenden entsprechenden Feynman-Diagramme verdeutlicht.

Die *Bewegungsgleichungen für die Quarks, Gluonen und Geister* erhält man aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.26)$$

wobei $\phi = \psi, \bar{\psi}, A_\mu^a, \chi_1^a, \chi_2^a$. Mit (3.15)-(3.19) ergeben sich die *Dirac-Gleichungen für die Quark-Felder*

$$(i \gamma_\mu D^\mu - M) \psi = 0 \quad (3.27)$$

$$\bar{\psi} (i \gamma_\mu D^{\mu*} + M) = 0 \quad (3.28)$$

die *Bewegungsgleichungen für die Gluon-Felder*

$$D_\mu F_{\mu\nu}^a + g \bar{\psi} (\gamma^\mu \hat{T}^a) \psi + \frac{1}{\alpha} \partial^\mu \partial_\nu A^{\nu,a} + i g f^{abc} (\partial^\mu \chi_1^b) \chi_2^c = 0 \quad (3.29)$$

sowie die *Bewegungsgleichungen für die Geister-Felder*

$$D_\mu^{ab} (\partial^\mu \chi_1^b) = 0 \quad (3.30)$$

$$\partial^\mu (D_\mu^{ab} \chi_2^b) = 0 \quad (3.31)$$

Die *kanonisch konjugierten Impulse* der Felder sind durch $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ gegeben. Für die Quark-Felder ergibt sich

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \frac{i}{2} \psi^+ \quad (3.32)$$

$$\bar{\pi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2} \bar{\psi}^+ \quad (3.33)$$

für die Gluon-Felder findet man ($k = 1, 2, 3$)

$$\Pi^{k,a} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_k^a} = F^{ko,a} \quad (3.34)$$

$$\Pi^{0,a} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_0^a} = -\frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A^{\mu,a}) \quad (3.35)$$

Gleichung (3.35) macht noch einmal die Notwendigkeit des Eichfixierungsterms (3.7) deutlich: er garantiert, daß die 0-Komponente des kanonischen Impulses Π^0 nicht verschwindet. Andernfalls ließe sich keine widerspruchsfreie Hamiltondichte definieren.

Die kanonischen Impulse der Geister-Felder schließlich sind

$$\kappa_1^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}_1^a} = -i D_o^{ab} \chi_2^b \quad (3.36)$$

$$\kappa_2^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}_2^a} = i \dot{\chi}_1^a \quad (3.37)$$

Die *Hamiltondichte* ist definiert durch

$$\mathcal{H} = -\pi \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} \bar{\pi} + \Pi_\mu^a \dot{A}^{\mu,a} + \dot{\chi}_1^a \kappa_1^a + \dot{\chi}_2^a \kappa_2^a - \mathcal{L} \quad (3.38)$$

Analog zu (3.23) läßt sich $\mathcal{H}$ aufspalten in einen freien, g -unabhängigen Term und einen g -abhängigen Wechselwirkungsanteil

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^o + \mathcal{H}^{int} \quad (3.39)$$

Der *freie Anteil* ist gegeben durch ¹

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^o = & \bar{\psi} \left(-\frac{i}{2} \gamma_k \vec{\partial}^k + M \right) \psi \\ & + \frac{1}{4} (\partial_k A^{j,a} - \partial_j A^{k,a}) (\partial^k A_j^a - \partial^j A_k^a) \\ & - \frac{1}{2} \Pi_k^a \Pi^{k,a} - \frac{\alpha}{2} \Pi_o^a \Pi^{o,a} \\ & + \Pi^{k,a} \partial_k A^{o,a} - \Pi^{o,a} \partial_k A^{k,a} \\ & - i \kappa_2^a \chi_1^a + i (\partial_k \chi_1^a) (\partial^k \chi_2^a) \end{aligned} \quad (3.40)$$

¹ $A \vec{\partial}_\mu B \equiv A (\partial_\mu B) - (\partial_\mu A) B$

und der Wechselwirkungsanteil ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{int} = & - g \bar{\psi} \left(\gamma^\mu \hat{T}^a \right) \psi A^{\mu, a} \\
& + g f^{abc} \Pi_k^a A^{k, b} A^{o, c} \\
& + \frac{g}{2} f^{abc} \left(\partial_k A^{j, a} - \partial_j A^{k, a} \right) A^{k, b} A^{j, c} \\
& - \frac{g^2}{4} f^{abe} f^{cde} A_k^a A_j^b A^{k, c} A^{j, d} \\
& + i g f^{abc} \left(\partial_k \chi_1^a \right) \chi_2^b A^{k, c} \\
& + g f^{abc} \kappa_2^a \chi_2^b A^{o, c}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Dabei ist zu bemerken, daß aufgrund der Kopplungsterme mit Zeitableitung sich $\mathcal{H}^{int}$ von $-\mathcal{L}^{int}$ unterscheidet.

Die *Hamiltonfunktion* erhält man schließlich durch Integration über die Raumkoordinaten

$$\begin{aligned}
H & = H^o(t) + H^{int}(t) \\
& = \int d^3x \mathcal{H}^o(\vec{x}, t) + \int d^3x \mathcal{H}^{int}(\vec{x}, t)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.3 Kovariante kanonische Quantisierung

Die Lagrangedichte (3.15)-(3.19) mit den Quark-, Gluon- und Geister-Feldern, ψ , $\bar{\psi}$, A_μ^a , χ_1^a , χ_2^a und den entsprechenden kanonisch konjugierten Impulsen, π , $\bar{\pi}$, Π_μ^a , κ_1^a , κ_2^a , Gl.(3.32)-(3.35), definiert zusammen mit den Bewegungsgleichungen (3.27)-(3.31) die klassische Chromodynamik, die den Anforderungen der Lorentzkovarianz genügt.

Der entscheidende Schritt von der klassischen Feldtheorie zur entsprechenden Quantentheorie, der QCD, besteht nun in der *Quantisierung der Quark-, Gluon- und Geister-Felder*. Dazu werden die Felder und kanonischen Impulse den folgenden gleichzeitigen (Anti)-Kommutationsrelationen unterworfen:

$$\left\{ \hat{\psi}_{cf\alpha}(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{c'f'\alpha'}^\dagger(\vec{y}, t) \right\}_+ = \delta_{cc'} \delta_{ff'} \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.43)$$

$$\left[\hat{A}_\mu^a(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\nu^b(\vec{y}, t) \right]_- = i g_{\mu\nu} \delta^{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.44)$$

$$\left\{ \hat{\chi}_1^a(\vec{x}, t), \hat{\kappa}_1^b(\vec{y}, t) \right\}_+ = -i \delta^{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.45)$$

$$\left\{ \hat{\chi}_2^a(\vec{x}, t), \hat{\kappa}_2^b(\vec{y}, t) \right\}_+ = -i \delta^{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.46)$$

Durch die Quantisierung werden die Quark-, Gluon- und Geister-Felder zu *hermiteschen Operatoren im Heisenberg-Bild*, die der Fermi-Statistik (Quarks und Geister) bzw. der Bose-Statistik (Gluonen) genügen. Im Heisenberg-Bild sind die Operatoren explizit zeitabhängig. Wir postulieren wie üblich, daß die (zeitunabhängigen)

physikalischen Zustände des Systems - z.B. Energie-Eigenzustände - ein vollständiges Funktionensystem bilden. Die Dynamik des Systems wird dann im Heisenberg-Bild durch die *Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für die Feldoperatoren* $\hat{O}(\vec{x}, t)$ ($\equiv \hat{\psi}, \hat{\psi}^+, \hat{A}_\mu^a, \hat{\chi}_1^a, \hat{\chi}_2^a$) bestimmt:

$$i \partial_t \hat{O}(\vec{x}, t) = \left[\hat{O}(\vec{x}, t), \hat{H} \right]_- \quad (3.47)$$

wobei $\hat{H}$ der Hamiltonoperator nach (3.42) ist.

In der Teilchen-Interpretation der Quantenfeldtheorie entsprechen den Feldoperatoren bestimmte Teilchen. Aus (3.43)-(3.46) wird daher ersichtlich, daß der durch diese Relationen definierte Hilbertraum vier *unphysikalische Felder bzw. Teilchen* enthält: die skalar und longitudinal polarisierten Gluonen und die zwei Geister.

Das ist der Preis den man für die kovariante Quantisierung bezahlen muß. Führt man die Quantisierung hingegen in einer physikalischen Eichung (z.B. Coulomb-Eichung) durch, so treten diese unphysikalischen Zustände nicht auf. Dafür ist eine solche Theorie nicht mehr kovariant und die Feynmanregeln haben eine komplizierte Struktur. Dagegen ist die hier vorgeführte Quantisierung manifest kovariant und führt, wie wir sehen werden, auf einfache, übersichtliche Feynmanregeln.

3.4 Definition physikalischer Zustände

Ebenso wie in der kovarianten Quantisierung der QED bedingen die unphysikalischen Felder Zustandsvektoren mit negativer Norm, d.h. der Hilbertraum $\mathcal{H}$ hat eine indefinite Metrik. Um eine sinnvolle Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Theorie zu gewährleisten ist es notwendig, einen Unterraum $\mathcal{H}_{phys} \subset \mathcal{H}$ zu finden, der die *physikalischen Zustände* des Systems beschreibt.

Die indefinite Metrik von $\mathcal{H}$ hat ihren Ursprung in der kovarianten Quantisierung der Eichfelder durch den Kommutator ² (3.44) :

$$\left[\hat{A}_\mu(\vec{x}, t), \hat{\Pi}_\nu(\vec{y}, t) \right]_- = i g_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.48)$$

und führt zu

$$\left[\hat{c}_\mu, \hat{c}_\nu^+ \right]_- = -g_{\mu\nu} \quad (3.49)$$

für die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren. Das Auftreten von Zuständen mit negativer Norm wie

$$|1\rangle = \hat{c}_o^+ |O\rangle, \quad \langle 1|1\rangle = -\langle O|O\rangle \quad (3.50)$$

²Wir lassen der Übersichtlichkeit halber die Farbindizes an den Operatoren in diesem Abschnitt weg, da sie für die Betrachtung unwesentlich sind.

ist offensichtlich eine Konsequenz der indefiniten Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ und bedingt negative (!) Wahrscheinlichkeiten. Die Folgerung daraus ist, daß der durch die Gleichungen (3.43)-(3.46) definierte Hilbertraum $\mathcal{H}$ zu groß ist, um eine sinnvolle Beschreibung der physikalischen Welt zu ermöglichen. Eines der grundlegendsten Probleme der kovarianten Quantisierung ist daher die *konsistente Definition eines physikalischen Hilbertraums $\mathcal{H}_{phys}$, der die unphysikalischen Zustände negativer Norm nicht (!) enthält.*

In der QED erreicht man die Trennung von physikalischen und unphysikalischen Zuständen durch die 'Gupta-Bleuler Bedingung' (Gu 50, Bl 50)

$$\partial_\mu \hat{A}^{\mu(+)} |\Psi_{phys} > = 0 \quad (3.51)$$

wobei (+) den Anteil positiver Frequenzen des Feldoperators $\hat{A}^\mu$ bezeichnet.

Durch diese Zwangsbedingung erreicht man, daß alle Zustände $|\Phi_o >$, die unphysikalische Freiheitsgrade beinhalten, verschwindende Norm besitzen und alle ausschließlich (!) aus physikalischen Freiheitsgraden bestehende Zustände $|\Psi_{phys} >$ die Norm 1 haben, d.h.

$$< \Phi_o | \Phi_o > = 0, \quad < \Psi_{phys} | \Psi_{phys} > = 1 \quad (3.52)$$

Da sich ein allgemeiner Zustand $|\Psi >$ stets in physikalische und unphysikalische Anteile faktorisieren läßt (Ku 79),

$$|\Psi > = |\Psi_{phys} > \cdot |\Phi_o > \quad (3.53)$$

ist das Skalarprodukt

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi_{phys} | \Psi_{phys} \rangle \cdot \langle \Phi_o | \Phi_o \rangle \geq 0 \quad (3.54)$$

positiv semidefinit und nur dann von Null verschieden, falls $|\Psi\rangle$ keine (!) unphysikalischen Freiheitsgrade enthält.

Entsprechend läßt sich der vollständige Hilbertraum $\mathcal{H}$ zerlegen in einen physikalischen und einen unphysikalischen Unterraum:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{phys} + \mathcal{H}_o$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{phys} &= \{ |\Psi_{phys}\rangle \} \\ \mathcal{H}_o &= \{ |\Phi_o\rangle \} \end{aligned} \quad (3.55)$$

wobei $\mathcal{H}_{phys}$ orthogonal zu $\mathcal{H}_o$ ist. Alle physikalischen realen Prozesse spielen sich somit in $\mathcal{H}_{phys}$ ab !

Zusammenfassend läßt sich festhalten:

Die Zusatzbedingung (3.50) und das eben erläuterte Konzept erlauben also eine konsistente kovariante Quantisierung der Theorie mit einer physikalisch sinnvollen Wahrscheinlichkeitsinterpretation.

Ein entsprechender Formalismus wurde von Kugo und Ojima (Ku 79) für nicht-abelsche Eichtheorien entwickelt. Diese basiert auf einer Verallgemeinerung der Gupta-Bleuler Bedingung (3.50) und stützt sich auf die in Abschnitt 3.3 vorgestellte BRS-Eichsymmetrie und der zugehörigen erhaltenen BRS-Ladung $\hat{Q}_{BRS}$. Allerdings

tritt in diesem Fall die zusätzliche Komplikation auf, daß $\hat{Q}_{BRS}$ von der Kopplungskonstante g abhängt. Es läßt sich jedoch zeigen, daß für asymptotische Zustände die Gupta-Bleuler Bedingung für die Gluon-Feldoperatoren und eine entsprechende Forderung an die Geister-Feldoperatoren ausreichend ist um eine konsistente Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Theorie zu garantieren. Diese Verallgemeinerung von (3.50) ist

$$\hat{Q}_{BRS}^0 | \Psi_{phys} \rangle = 0 \quad (3.56)$$

wobei $\hat{Q}_{BRS}^0$ den g -unabhängigen Anteil des BRS-Ladungsoperators $\hat{Q}_{BRS}$ bezeichnet.

Dies führt zu der Definition physikalischer Zustände und Observablen:

1. *Physikalische Freiheitsgrade* sind alle, bezüglich der BRS Transformationen eichinvarianten Freiheitsgrade.
2. *Physikalische Zustände* $| \Psi_{phys} \rangle$ enthalten weder skalare und longitudinale Gluonen noch Geister.
3. Jeder Operator $\hat{O}$, der mit der BRS-Ladung $\hat{Q}_{BRS}$, (bzw. mit $\hat{Q}_{BRS}^0$) entweder kommutiert oder antikommutiert,

$$[\hat{Q}_{BRS}, \hat{O}]_- = 0 \quad \text{oder} \quad \{ \hat{Q}_{BRS}, \hat{O} \}_+ = 0 \quad (3.57)$$

entspricht einer *physikalischen Observablen*.

4 Störungstheorie für die QCD in einer sphärischen Kavität - Feynman Regeln

Da es bislang nicht möglich ist, die Bewegungsgleichungen der QCD exakt zu lösen, ist man auf störungstheoretische Berechnungen oder andere approximative Lösungsansätze angewiesen. Wie in Kapitel 2 erläutert, bedingt die asymptotische Freiheit der QCD, daß die Kopplungskonstante g für genügend kleine Relativabstände ($\ll 1 \text{ fm}$) der wechselwirkenden Teilchen gering ist. Daher kann man hoffen, daß die Wechselwirkung hinreichend schwach ist, um als Störung behandelt zu werden, so daß die Störungstheorie zumindest für den kurzreichweitigen Bereich der QCD eine adäquate Beschreibung erlaubt.

In diesem Kapitel wird zunächst das allgemeine störungstheoretische Konzept erläutert, welches anschließend auf den hier interessierenden Fall der *QCD innerhalb einer sphärischen Kavität* angewendet wird. Es werden die entsprechenden Feynmanregeln abgeleitet und am Beispiel der Quark-Antiquark und Gluon-Gluon Wechselwirkung illustriert. Die in den Kapiteln 6 und 7 präsentierten Ergebnisse dieser Vorgehensweise werden im Nachhinein die Anwendbarkeit der Störungstheorie für die Beschreibung von Glueballs und Hadronen bestätigen.

4.1 Das Gell-Mann und Low Theorem

Wie im vorigen Kapitel erläutert, führt die Quantisierung der klassischen Theorie von den klassischen Feldern auf Feldoperatoren und Zustandsvektoren der QCD im Heisenberg-Bild. Die Dynamik der Quantentheorie wird bestimmt durch die *Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen* für die Operatoren $\hat{O}(\vec{x}, t)$ und die Zustandsvektoren $|\Psi\rangle$:¹

$$i \partial_t \hat{O}^H(\vec{x}, t) = [\hat{O}^H(\vec{x}, t), \hat{H}^H] \quad (4.1)$$

$$i \partial_t |\Psi^H(t)\rangle = 0 \quad (4.2)$$

Die Zustandsvektoren sind nach (4.2) zeitunabhängig, d.h. $|\Psi^H(t)\rangle = |\Psi^H(t_0)\rangle = \text{const.}$

Für die störungstheoretische Untersuchung ist es zweckmäßig, vom Heisenberg-Bild (H) zum Wechselwirkungsbild (W) überzugehen. Dazu greifen wir auf die Zerlegung des Hamiltonoperators (3.42) in einem ungestörten und einem g -abhängigen Wechselwirkungsanteil zurück:

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^{\text{int}} \quad (4.3)$$

¹Wir folgen hier der Darstellung von (Fe 71) und (Bu 88).

Der Übergang zum Wechselwirkungsbild wird durch eine unitäre Transformation $\hat{U}(t)$ der Operatoren und Zustandsvektoren vermittelt:

$$\hat{O}^W(\vec{x}, t) = \hat{U}(t) \hat{O}^H(\vec{x}, t) \hat{U}^{-1}(t) \quad (4.4)$$

$$|\Psi^W(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi^H(t_0)\rangle \quad (4.5)$$

wobei $\hat{U}(t)$ durch

$$i \partial_t \hat{U}(t) = \hat{U}(t) \hat{H}^{int}(t) \quad (4.6)$$

bestimmt wird.

Aus (4.1)-(4.6) folgen die *Bewegungsgleichungen im Wechselwirkungsbild*, die die zeitliche Entwicklung des Systems beschreiben:

$$i \partial_t \hat{O}^W(\vec{x}, t) = [\hat{O}^W(\vec{x}, t), \hat{H}^0] \quad (4.7)$$

$$i \partial_t |\Psi^W(t)\rangle = \hat{H}^{int}(t) |\Psi^W(t)\rangle \quad (4.8)$$

Im Wechselwirkungsbild genügen die Feldoperatoren $\hat{O}$ also der Heisenbergschen Bewegungsgleichung für das ungestörte $\hat{H}^0$ -Problem, welches exakt lösbar ist. Daher sind in dieser Darstellung sowohl die explizite Form der Operatoren als auch deren

Vertauschungsrelationen zu einem beliebigen Zeitpunkt bekannt. Der Einfluß der (zunächst nicht notwendig kleinen) Wechselwirkung wird einzig durch die Dynamik der Zustandsvektoren beschrieben. Deshalb erweist sich die Wechselwirkungsdarstellung zur Lösung konkreter Probleme als sehr zweckmäßig.

Unter der Transformation $\hat{U}(t)$ bleiben alle Operatorrelationen, ausgedrückt durch die Felder und deren kanonische Impulse, unverändert. Insbesondere sind die (Anti) Vertauschungsrelationen (3.43)-(3.46) und der Hamiltonoperator nach (3.42) und (3.40),(3.41) in Kapitel 3 formal identisch in beiden Bildern.

Zur Lösung des durch die Bewegungsgleichungen (4.6)-(4.8) gegebenen Problems definiert man einen unitären Operator $\hat{U}(t, t_0)$, der den Zustandsvektor zur Zeit t_0 mit dem Zustandsvektor zur Zeit t in Verbindung bringt (das Superskript W wird im folgenden weggelassen, d.h. $|\Psi\rangle \equiv |\Psi^W\rangle$):

$$\hat{U}(t, t_0) := \hat{U}(t) \hat{U}^{-1}(t_0) \quad (4.9)$$

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \quad (4.10)$$

Der *Zeitentwicklungsoperator* $\hat{U}(t, t_0)$ beschreibt somit die vollständige Dynamik des Systems.

Aus (4.6) - (4.8) und (4.9) folgt die Bestimmungsgleichung für $\hat{U}(t, t_0)$:

$$i \partial_t \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}^{int}(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (4.11)$$

mit der Nebenbedingung:

$$\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{1} \quad (4.12)$$

Die formale Integration von (4.11) unter Berücksichtigung von (4.12) führt auf die *Dyson Entwicklung für den Zeitentwicklungsoperator* $\hat{U}(t, t_0)$:

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T[\hat{H}^{int}(t_1), \dots, \hat{H}^{int}(t_n)] \quad (4.13)$$

wobei $T[\dots]$ das zeitgeordnete Produkt der Operatoren bezeichnet.

Man führt nun einen mathematischen Trick durch, der es erlaubt, die Wechselwirkung adiabatisch ein- und auszuschalten und somit die exakten Eigenzustände des wechselwirkenden Systems aus denen des nicht-wechselwirkenden Systems, welches exakt lösbar ist, zu gewinnen. Dazu führt man einen Dämpfungsfaktor in den Hamiltonoperator ein :

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + e^{-\epsilon|t|} \hat{H}^{int} \quad (4.14)$$

wobei ϵ eine kleine positive Zahl ist. Für $t \rightarrow \pm \infty$, strebt $\hat{H}$ gegen $\hat{H}^0$, d.h. in der fernen Vergangenheit und Zukunft reduziert sich die Dynamik des Systems auf das exakt lösbare $\hat{H}^0$ -Problem. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hingegen ist $\hat{H}$ der vollständige Hamiltonoperator des wechselwirkenden Systems und die Wechselwirkung ist in voller Stärke präsent. Am Ende der Rechnung läßt man $\epsilon \rightarrow 0$ streben und jedes sinnvolle physikalische Resultat muß unabhängig von ϵ sein.

Mit dem neuen Hamiltonoperator (4.14) wird auch der Zeitentwicklungsoperator (4.13) von ϵ abhängig,

$$\hat{U}_\epsilon(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n e^{-i\epsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} T[\hat{H}^{int}(t_1), \dots, \hat{H}^{int}(t_n)] \quad (4.15)$$

Sei nun $|\Phi_k^\circ\rangle$ ein exakter Eigenzustand zum ungestörten Operator $\hat{H}^\circ$ mit Eigenwert E_k° , d.h.

$$\hat{H}^\circ |\Phi_k^\circ\rangle = E_k^\circ |\Phi_k^\circ\rangle \quad (4.16)$$

dann ist nach (4.10) und (4.15) dieser Zustandsvektor für $t \rightarrow \pm\infty$ auch Eigenzustand des Hamiltonoperator (4.14). Die exakten Eigenzustände zum Zeitpunkt $t = 0$ entwickeln sich daher aus dem asymptotischen Zustand $|\Phi_k^\circ\rangle$.

Das *Gell-Mann und Low Theorem* (Ge 51) garantiert nun, daß dieser auch im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ gilt. Falls der Zustandsvektor

$$|\Psi_k^{(0)}\rangle \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_\epsilon(0, -\infty) |\Phi_k^\circ\rangle}{\langle \Phi_k^\circ | U_\epsilon(0, -\infty) | \Phi_k^\circ \rangle} \quad (4.17)$$

in allen Ordnungen der Störungstheorie existiert, so ist er ein exakter Eigenzustand des vollständigen Hamiltonoperators $\hat{H}(t=0)$, d.h.

$$\hat{H}(0) |\Psi_k\rangle = E_k |\Psi_k\rangle \quad (4.18)$$

Die *Gesamtenergie des wechselwirkenden Systems* $E_k = E_k^\circ + \Delta E_k$ ist dann gegeben durch

$$E_k = E_k^o + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \Phi_k^o | \hat{H}^{int}(0) U_\epsilon(0, -\infty) | \Phi_k^o \rangle}{\langle \Phi_k^o | U_\epsilon(0, -\infty) | \Phi_k^o \rangle} \quad (4.19a)$$

Durch Einsetzen der Dyson-Entwicklung von $U_\epsilon(t, t_o)$ (4.15) und Anwendung des Goldstone Theorems (Go 57, Fe 71) reduziert sich (4.19a) auf

$$E_k = E_k^o + \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} \right. \\ \left. \times \langle \Phi_k^o | T [\hat{H}^{int}(0) \hat{H}^{int}(t_1) \dots \hat{H}^{int}(t_n)] | \Phi_k^o \rangle_{connected} \right] \quad (4.19b)$$

Dies ist die zentrale Gleichung für die störungstheoretische Auswertung eines Systems wechselwirkender Quarks, Gluonen und Geister. Die Wick'sche Zerlegung dieses Ausdrucks führt letztendlich zu einer Entwicklung nach Feynman Diagrammen, wie in Abschnitt 4.3 ausgeführt wird. Dabei ist die Summation in (4.19b) auf die sogenannten *connected* oder *verbundenen* Diagramme zu beschränken. Die *disconnected* oder *unverbundenen* Graphen heben sich nach dem Goldstone Theorem gegen den Nenner in (4.19) auf.

Eine abschließende Bemerkung zu der Bedingung (4.17) : es ist nicht unmittelbar einsichtig, daß diese Forderung für den durch (3.42) und (3.39), (3.40) gegebenen Hamiltonian erfüllt ist. Die Störungsentwicklung der QCD weist bekanntermaßen Divergenzen auf, die von Ultraviolett-Singularitäten herrühren. Allerdings beeinträchtigen diese Divergenzen die Gültigkeit Gell-Mann und Low-Theorems (4.17) nicht, da sie durch Einführung adäquater Gegenterme im Lagrangian kompensiert werden können. Dies ist eine Folge der Renormierbarkeit der QCD.

4.2 QCD mit Randbedingungen für die sphärische Kavität

Der in den vergangenen Abschnitten präsentierte Formalismus ist insoweit exakt und allgemeingültig, als weder Näherungen gemacht werden noch spezifische Modellannahmen eingehen. Er basiert einzig auf dem Konzept der quantenfeldtheoretischen Formulierung der nichtabelschen Eichtheorie.

Nun wollen wir diesen formalen Apparat zur Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit verwenden und die starke Wechselwirkung von Quarks und Gluonen und letztendlich die Glueballs studieren. Dazu benötigen wir eine konsistente phänomenologische Beschreibung der empirischen Tatsache, daß Farbladung tragende Konstituenten physikalischer Teilchen (z.B. Glueballs oder Hadronen) in deren Innern eingeschlossen sind (*Color-Confinement*). Dieses Confinement, so nimmt man an, wird durch nicht-störungstheoretische Effekte verursacht, die sich nicht (!) durch die störungstheoretische Entwicklung nach Abschnitt 4.1 beschreiben lassen. Daher müssen wir die Eigenschaft des Confinement *von Hand* in die Theorie einbauen. Dies geschieht, indem wir die Theorie Randbedingungen unterwerfen. Genauer ausgedrückt, verlangen wir von den Feldoperatoren, daß sie gewissen Randbedingungen an der Oberfläche einer sphärischen Kavität vom Volumen V genügen, in welcher die farbgeladenen Konstituenten eingeschlossen sein sollen. Obwohl diese spezifische Modellannahme wie die implizite Akzeptanz des MIT Bag-Modells erscheint, definiert sie jedoch zunächst lediglich das Problem der Modifikation der *räumlich unbeschränkten QCD* hin zur *QCD innerhalb eines beschränkten sphärischen Raumvolumens*, nämlich der Kavität. Diese modifizierte QCD soll natürlich möglichst alle wesentlichen Grundzüge der ursprünglichen Theorie beinhalten, d.h. wir verlangen, daß innerhalb der Kavität die Feldoperatoren den Bewegungsgleichungen (3.27)-(3.31) genügen und ferner die Symmetrieeigenschaften der Theorie wie erhaltene Ströme

bestehen bleiben.

Wir definieren die sphärische Kavität mit Volumen V durch ¹

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ 0 & x \notin V \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\partial_\mu \theta(x) = n_\mu \delta(x) \quad (4.21)$$

wobei $n_\mu = (n_o, -\vec{n})$ einen raumartigen Einheitsvektor mit

$$n_\mu n^\mu = -1 \quad (4.22)$$

bezeichnet. Der Dreiervektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Oberfläche S und ist nach außen gerichtet.

An die Feldoperatoren stellen wir die folgenden Randbedingungen (Ch 74, DeG 75):

$$(i n_\mu \gamma^\mu - 1) \hat{\psi} |_S = \hat{\bar{\psi}} (i n_\mu \gamma^\mu + 1) |_S = 0 \quad (4.23)$$

$$n_\mu \hat{F}^{\mu\nu,a} |_S = n_\mu \hat{A}^{\mu,a} |_S = n_\mu \partial^\mu (\partial_\nu \hat{A}^{\nu,a}) |_S = 0 \quad (4.24)$$

¹Wir folgen in unserer Notation den ausgezeichneten Arbeiten von R.Buser et al. (Bu 88) und A.J.Stoddart (St 87) über 'QCD und kanonische Quantisierung in einer sphärischen Kavität'.

$$n_\mu (\partial^\mu \hat{\chi}_1^a) |_S = n_\mu (\partial^\mu \hat{\chi}_2^a) |_S = 0 \quad (4.25)$$

Diese Randbedingungen beziehen sich auf die Operatoren im Heisenberg Bild. Im Wechselwirkungsbild hat man entsprechende Bedingungen. Die Gleichungen (4.23)-(4.25) garantieren, daß zum einen die Feldoperatoren innerhalb der Kavität nach wie vor den Bewegungsgleichungen (3.27)-(3.31) genügen, andererseits aber kein Farbstrom durch die Volumenoberfläche nach außen fließt, so daß die Kavität als Ganzes ein Color-Singlet darstellt. Indem man die Feldoperatoren innerhalb der Kavität lokalisiert, verletzt man die Translationsinvarianz der Theorie. Folglich ist der Dreierimpuls keine erhaltene Größe mehr. Der Verlust der Translationsinvarianz läßt sich allerdings zumindest im Groben durch eine Korrektur zur Schwerpunkt-Bewegung der Kavität rückgängig machen, wie in Kapitel 5 erläutert wird.

Im Folgenden beschränken wir uns nun auf den *Spezialfall einer statischen Kavität* ($n^0 = 0$), so daß der Hamiltonoperator zeitunabhängig ist und die Energie erhalten bleibt. Dementsprechend reduzieren sich die Randbedingungen (4.23)-(4.25) auf ihre räumlichen Komponenten, wie in Anhang A ausgeführt ist.

Wir entwickeln nun die Feldoperatoren in eine sphärische Basis, d.h. in ein vollständiges Funktionensystem, das die Bewegungsgleichungen (3.27)-(3.31) und die Randbedingungen (4.23)-(4.25) erfüllt. Für den Fall der statischen Kavität läßt sich die Zeitabhängigkeit der Quark-, Gluon- und Geisterfunktionen abspalten, so daß die Bewegungsgleichungen und Randbedingungen zeitunabhängig werden (siehe Anhang A).

Die Entwicklung der *Quark-Feldoperatoren* lautet:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{cf}(x) &= \hat{\psi}_{cf}^{(+)}(x) + \hat{\psi}_{cf}^{(-)}(x) \\
&= \sum_{\substack{\kappa, \mu \\ \nu > 0}} \left[\hat{a}_{cn} u_n(\vec{x}) e^{-i\epsilon_n t} + \hat{b}_{cn}^+ u_{-n}(\vec{x}) e^{+i\epsilon_n t} \right] \quad (4.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{\psi}}_{cf} &= \hat{\bar{\psi}}_{cf}^{(+)}(x) + \hat{\bar{\psi}}_{cf}^{(-)}(x) \\
&= \sum_{\substack{\kappa, \mu \\ \nu > 0}} \left[\hat{a}_{cn}^+ \bar{u}_n(\vec{x}) e^{+i\epsilon_n t} + \hat{b}_{cn} \bar{u}_{-n}(\vec{x}) e^{-i\epsilon_n t} \right] \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Dabei sind u_n und u_{-n} die Eigenmoden der Quarks in der Kavität, die sich aus der Randbedingung (4.23) ergeben, wie in Anhang A erläutert wird. Ferner wurde die Symmetrieeigenschaft

$$\epsilon_{-n} = -\epsilon_n, \quad \epsilon_n = \text{sign}(\nu) \sqrt{p_n^2 + m_f^2} \quad (4.28)$$

verwendet, wobei n und $-n$ für einen vollständigen Satz von Quantenzahlen der Quarks stehen,

$$n = (f, \nu, \kappa, \mu), \quad -n = (f, -\nu, -\kappa, -\mu) \quad (4.29)$$

und f den Flavour, ν die radiale Quantenzahl, κ die Drehimpuls-Spin Projektion, sowie μ die magnetische Quantenzahl bedeuten. Die Summation in (4.26) und (4.27) erstreckt sich über sämtliche Werte von κ und μ , sowie über alle positiven radialen Quantenzahlen ν .

Die Operatoren $\hat{a}_{cn}^+$ ($\hat{a}_{cn}$) bzw. $\hat{b}_{cn}^+$ ($\hat{b}_{cn}$) sind Erzeugungs-(Vernichtungs-) Operatoren für ein Quark bzw. Antiquark mit Color c und Quantenzahlkombination n . Sie genügen nach (3.43) den Antivertauschungs-Relationen

$$\{ \hat{a}_{cn}, \hat{a}_{c'n'}^+ \} = \{ \hat{b}_{cn}, \hat{b}_{c'n'}^+ \} = \delta_{cc'} \delta_{nn'} \quad (4.30)$$

Entsprechend lassen sich die *Gluon-Feldoperatoren* nach ihren Eigenmoden in der Kavität entwickeln (Anhang A):

$$\begin{aligned} \hat{A}_a^\mu(x) &= \hat{A}_a^{\mu(+)}(x) + \hat{A}_a^{\mu(-)}(x) \\ &= \sum_{\substack{\sigma, J, M \\ N \geq 0}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m^\sigma}} \left[\hat{c}_{a,m}^\sigma a_m^{\mu\sigma}(\vec{x}) e^{-i\omega_m^\sigma t} + \hat{c}_{a,m}^{\sigma+} a_m^{\mu\sigma}(\vec{x})^* e^{+i\omega_m^\sigma t} \right] \quad (4.31) \end{aligned}$$

Hierbei spezifiziert

$$\sigma = S, L, TE, TM \quad (4.32)$$

die skalare (S), longitudinale (L), transversal elektrische (TE) bzw. transversal magnetische (TM) Polarisierung der Gluon-Moden.

Der Index m steht für den folgenden Satz von Quantenzahlen

$$m = (N, J, M) \quad (4.33)$$

wobei N die radiale Quantenzahl, J der Drehimpuls und M die Drehimpulsprojektion angibt.

Die Operatoren $\hat{c}_{a,m}^{\sigma+}$ bzw. $\hat{c}_{a,m}^{\sigma}$ sind Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für ein Gluon mit Polarisation σ Quantenzahlkombination m und Color a . Sie erfüllen nach (3.44) die Vertauschungs-Relationen

$$[\hat{c}_{a,m}^{\sigma}, \hat{c}_{a',m'}^{\sigma'+}] = -g^{\sigma\sigma'} \delta_{aa'} \delta_{mm'} \quad (4.34)$$

mit dem metrischen *Polarisationstensor*

$$g^{\sigma\sigma'} = \begin{cases} +1 & \text{für } \sigma = S \\ -1 & \text{für } \sigma = L \\ -1 & \text{für } \sigma = TE \\ -1 & \text{für } \sigma = TM \end{cases} \quad g^{\sigma\sigma'} = 0 \text{ für } \sigma \neq \sigma' \quad (4.35)$$

Ferner gilt für die Gluon-Moden die Symmetriebeziehung

$$a_m^{\mu,\sigma}(\vec{x})^* = \eta^{\sigma} (-1)^M a_{m^*}^{\mu,\sigma}(\vec{x}) \quad (4.36)$$

wobei die Quantenzahlkombination m^* durch

$$m^* = (N, J, -M) \quad (4.37)$$

und der Phasenfaktor η^{σ} durch

$$\eta^{\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für } \sigma = L, TE \\ -1 & \text{für } \sigma = S, TM \end{cases} \quad (4.38)$$

gegeben ist.

Schließlich findet man für die *Geister-Feldoperatoren* die folgende Entwicklung nach Eigenmoden in der Kavität:

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{1a}(x) &= \hat{\chi}_{1a}^{(+)}(x) + \hat{\chi}_{1a}^{(-)}(x) \\ &= \sum_{\substack{J,M \\ N>0}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m^S}} \left[\hat{d}_{a,m} a_m^S(\vec{x}) e^{-i\omega_m^S t} + \hat{d}_{a,m}^+ a_m^S(\vec{x})^* e^{+i\omega_m^S t} \right] \quad (4.39)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{2a}(x) &= \hat{\chi}_{2a}^{(+)}(x) + \hat{\chi}_{2a}^{(-)}(x) \\ &= \sum_{\substack{J,M \\ N>0}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m^S}} \left[\hat{e}_{a,m} a_m^S(\vec{x}) e^{-i\omega_m^S t} + \hat{e}_{a,m}^+ a_m^S(\vec{x})^* e^{+i\omega_m^S t} \right] \quad (4.40)\end{aligned}$$

Die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren $\hat{d}_{a,m}^+$, $\hat{e}_{a,m}^+$ bzw. $\hat{d}_{a,m}$, $\hat{e}_{a,m}$ genügen nach (4.45) und (4.46) den folgenden Antivertauschungs-Relationen

$$\{ \hat{d}_{a,m}, \hat{e}_{a',m'}^+ \} = - \{ \hat{d}_{a,m}^+, \hat{e}_{a',m'} \} = i \delta_{aa'} \delta_{mm'} \quad (4.41)$$

Der *asymptotische Vakuumzustand* $|O\rangle$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}\hat{a}_{cn} |O\rangle &= \hat{b}_{cn} |O\rangle = 0 \\ \hat{c}_{am}^\sigma |O\rangle &= \hat{d}_{am} |O\rangle = \hat{e}_{am} |O\rangle = 0\end{aligned} \quad (4.42)$$

mit der Normierung

$$\langle O | O \rangle = 1 \quad (4.43)$$

Der Hilbertraum H der asymptotischen Zustände wird als vollständig angenommen und enthält somit sämtliche Zustände der wechselwirkenden Theorie, die sich wie in Abschnitt 4.1 erläutert, stetig aus den asymptotischen Zuständen entwickeln. Diese Zustände lassen sich dann in üblicherweise durch Anwendung entsprechender Kombinationen von Erzeugungsoperatoren auf das Vakuum $|O\rangle$ konstruieren.

4.3 Störungstheoretische Auswertung und graphische Darstellung

Wir kommen nun zur Essenz des in den vorangegangenen Abschnitten entwickelten störungstheoretischen Formalismus, nämlich der Ableitung der Feynman-Regeln für die QCD mit Randbedingungen innerhalb einer sphärischen Kavität. Diese Feynman-Regeln erlauben eine effektive, rigorose Berechnung von Wechselwirkungsprozessen mit Quarks, Gluonen und Geistern - dargestellt durch entsprechende Feynman Diagramme - bis zu beliebiger Ordnung in der Kopplungskonstante g .

Nach (4.19b) ist die *Gesamtenergie E des wechselwirkenden Systems mit Quarks, Gluonen und Geistern* gegeben durch

$$\begin{aligned}
 E_k &= E_k^0 + \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} \right. \\
 &\quad \left. \times \langle \Phi_{k'} | T[\hat{H}^{int}(0) \hat{H}^{int}(t_1) \dots \hat{H}^{int}(t_n)] | \Phi_k \rangle_{connected} \right] \\
 &= \langle \uparrow_1 \uparrow_2 \dots \uparrow_N + \sum_{n=0}^{\infty} \text{Diagram} \rangle
 \end{aligned}$$

$\sim (g^2)^n$

(4.44)

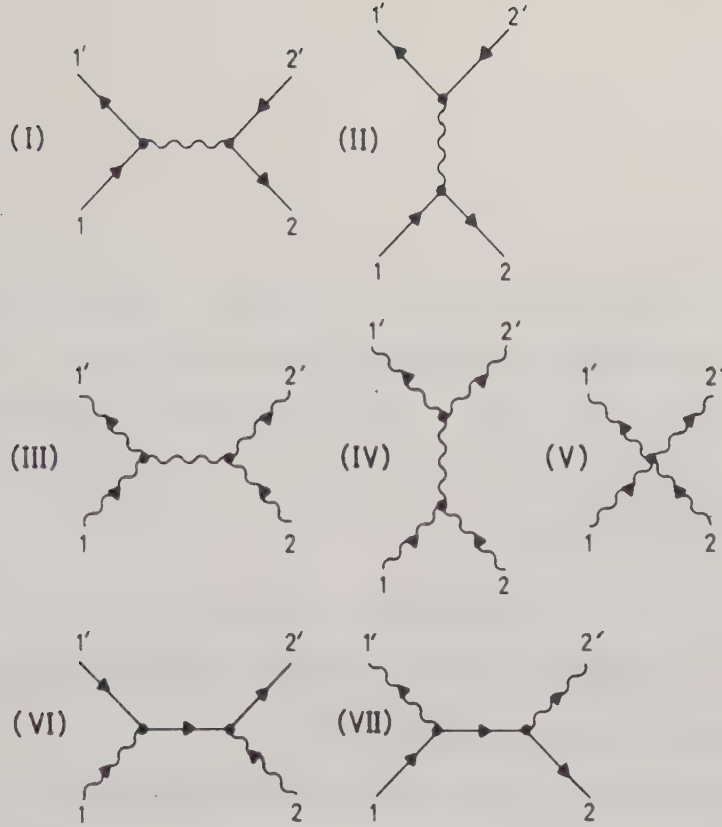
Hierbei bezeichnen $|\Phi_k\rangle$ und $|\Phi_{k'}\rangle$ asymptotische Vielteilchenzustände, die Eigenvektoren des ungestörten Hamiltonians $\hat{H}^0$, (3.40) und (3.42) sind. Diesen Ausdruck, dessen physikalische Bedeutung in der zweiten Zeile von (4.44) symbolisch durch Dia-

grammdarstellung wiedergegeben ist, gilt es auszuwerten.

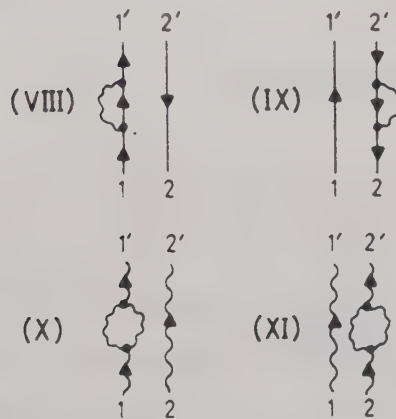
Dazu bedarf es folgender Erklärungen:

1. Wir werden uns in der konkreten Anwendung auf die *zweite Ordnung* $O(g^2)$ der störungstheoretischen Entwicklung beschränken, d.h. die Summation in (4.44) nach dem ersten Term ($n = 1$) abbrechen. Die im nächsten Abschnitt präsentierten Feynman-Regeln erlauben jedoch im Prinzip die Berechnung von (4.44) bis zu beliebiger Ordnung in der Kopplungskonstanten g .
2. Weiterhin ist ausdrücklich zu bemerken, daß wir uns auf die Berechnung von nicht divergenten *Baum-Diagrammen* (siehe Figur 4.1a) beschränken, um somit die Schwierigkeiten der *Renormierung von Feynman-Diagrammen in der Kavität* zu umgehen. Das Problem der Renormierung der QCD innerhalb eines beschränkten Raumbereichs unter Berücksichtigung von Randbedingungen ist äußerst komplex und bislang ungeklärt. Die Randbedingungen der Kavität verursachen - zusätzlich zu den gewöhnlichen Ultraviolett-Singularitäten, die auch in der *freien* QCD auftreten - Divergenzen an der Oberfläche der Kavität, welche sorgfältig extrahiert und separat behandelt werden müssen. Es existieren zwar erste Ansätze in diese Richtung (Ha 82, Ba 82, Go 85), eine rigorose Analyse der Renormierung für die räumlich beschränkte QCD erscheint jedoch in weiter Ferne. Wir werden daher in der konkreten Anwendung der Feynman-Regeln lediglich die *Baum-Diagramme* berechnen und die Beiträge der divergenten *Loop-Diagramme* (Figur 4.1b) parametrisieren, um sie an experimentelle Daten anzupassen.

(a)



(b)



Figur 4.1 :

Feynman-Diagramme, die der Wechselwirkung in zweiter Ordnung der Koppelungskonstante g entsprechen, d.h. sie sind $\sim g^2$. Die obigen Graphen werden in Kapitel 5 analysiert.

- (a) *Baum - Diagramme* : Quark-Antiquark Wechselwirkung via Gluon-Austausch (I) und Paarvernichtung (II); Gluon-Gluon-Wechselwirkung via Gluon-Austausch (III), Paarvernichtung (IV) und elementarem 4-Gluon-Vertex (V); (Gluon-Gluon) - (Quark-Antiquark) Wechselwirkung (VI),(VII).
- (b) *Loop - Diagramme* : Quark-Selbstenergie Diagramm (VIII), Antiquark-Selbstenergie Diagramm (IX); Gluon-Selbstenergie Diagramme ((X),(XI)).

(c) Die Zustandsvektoren $|\Phi_k\rangle$ und $|\Phi_{k'}\rangle$ in (4.44) bestehen im allgemeinen aus Quarks, Antiquarks, Gluonen und Geistern. Wir verlangen jedoch, daß $|\Phi_k\rangle$ bzw. $|\Phi_{k'}\rangle$ *physikalische Zustände* sein sollen, d.h. wir stellen, in Übereinstimmung mit dem in Abschnitt 3.4 gesagten, folgende Anforderungen:

- $|\Phi_k\rangle$ ist BRS-eichinvariant und enthält keine unphysikalischen Freiheitsgrade (skalare, longitudinale Gluonen sowie Geister):

$$\hat{Q}_{BRS}^0 |\Phi_k\rangle = 0 \quad (4.45)$$

- $|\Phi_k\rangle$ ist ein Color-Singlett:

$$\hat{Q}_{Color} |\Phi_k\rangle = 0 \quad (4.46)$$

- $|\Phi_k\rangle$ ist auf 1 normiert:

$$\langle \Phi_{k'} | \Phi_k \rangle = \delta_{k',k} \quad (4.47)$$

Mit anderen Worten: $|\Phi_k\rangle$ (entsprechendes gilt für $|\Phi_{k'}\rangle$) enthält ausschließlich Quarks, Antiquarks und die zwei physikalischen Gluon-Freiheitsgrade, nämlich die transversal elektrischen (TE) und transversal magnetischen (TM) Gluon-Moden.

(d) Die außerdiagonalen Matrixelemente des Wechselwirkungsoperators (2. Term in (4.44))

$$\begin{aligned}
V_{k'k} = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^0 dt_1 \dots \int_{-\infty}^0 dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} \right. \\
& \times \left. \langle \Phi_{k'}^o | T[\hat{H}^{int}(0) \hat{H}^{int}(t_1) \dots \hat{H}^{int}(t_n)] | \Phi_k^o \rangle_{connected} \right]
\end{aligned}
\tag{4.48}$$

sind im allgemeinen nicht verschwindend, was zu *Konfigurationsmischungen* führt, die wie ebenfalls zu berücksichtigen haben. Die Energieverschiebung und die entsprechenden Eigenvektoren erhält man daher durch Diagonalisierung der Matrix $V_{k'k}$. Diese Prozedur wird in Kapitel 5 näher erläutert.

Bevor wir nun die Feynman Regeln zur praktischen Berechnung der Matrixelemente (4.44) und (4.48) vorstellen, möchten wir den Weg skizzieren auf dem diese Regeln aus dem allgemeinen Ausdruck (4.48) abgeleitet werden (Fe 71). Wir illustrieren die einzelnen Schritte für den in den folgenden Kapiteln interessierenden Fall, daß $|\Phi_k\rangle$ und $|\Phi_{k'}\rangle$ physikalische Zwei-Teilchen Zustände darstellen (z.B. Quark-Antiquark oder Gluon-Gluon Zustände), die den Anforderungen (4.45)-(4.47) genügen : Wir betrachten also asymptotische Zwei-Teilchen Zustände

$$\begin{aligned}
|\Phi_k\rangle & \equiv |12\rangle = \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |O\rangle \\
|\Phi_{k'}\rangle & \equiv |34\rangle = \hat{a}_3^+ \hat{a}_4^+ |O\rangle
\end{aligned}
\tag{4.49}$$

die durch Anwendung der Erzeugungsoperatoren $\hat{a}_i^+$ für Teilchen i ($i = 1, 2, 3, 4$)

auf das Vakuum $|O\rangle$ erzeugt werden. Wir befinden uns im Wechselwirkungsbild, d.h. $|\Phi_k\rangle$ und $|\Phi_{k'}\rangle$ sind zeitunabhängig.

Mit diesen Zuständen müssen wir nun das Matrixelement (4.48) auswerten, d.h. im wesentlichen den Erwartungswert des zeitgeordneten Produkts

$$\begin{aligned} & \langle \Phi_{k'} | T[\hat{H}^{int}(0) \hat{H}^{int}(t_1) \dots \hat{H}^{int}(t_n)] | \Phi_k \rangle_{connected} \\ & = \langle O | \hat{a}_4 \hat{a}_3 T[\hat{H}^{int}(0) \dots \hat{H}^{int}(t_n)] \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ | O \rangle_{connected} \quad (4.50) \\ & = \langle O | T[\hat{a}_4 \hat{a}_3 \hat{H}^{int}(0) \dots \hat{H}^{int}(t_n) \hat{a}_1 \hat{a}_2] | O \rangle_{connected} \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt ausgenutzt, daß die Operatoren $\hat{a}_1^+$, $\hat{a}_2^+$, $\hat{a}_3$ und $\hat{a}_4$ ebenfalls zeitunabhängig sind und daher in das zeitgeordnete Produkt integriert werden können.

Der Vakuumserwartungswert (4.50) läßt sich nun in üblicher Weise unter Verwendung des Wick'schen Theorems in eine Summe von Matrixelementen normalgeordneter Produkte der Operatoren zerlegen (siehe z.B. Fe 71, It 84). Jedes dieser Matrixelemente ist graphisch darstellbar durch ein Feynman-Diagramm: Die Operatoren werden in einzelne Anordnungen gruppiert, derart daß jeder Operator mit jedem anderen Operator ein und derselben Gruppierung durch Propagatoren und Vertizes verbunden ist. Jede solche Gruppierung entspricht einem Teildiagramm des durch (4.50) beschriebenen Wechselwirkungsprozesses, welches eine Einheit für sich bildet und nicht mit anderen Teildiagrammen verbunden ist. In diesem Sinne bezeichnet man zwei Operatoren als *verbunden* oder *connected*, falls sie zu ein und derselben Gruppierung gehören. Operatoren aus verschiedenen Teilanordnungen heißen entsprechend *unverbunden*.

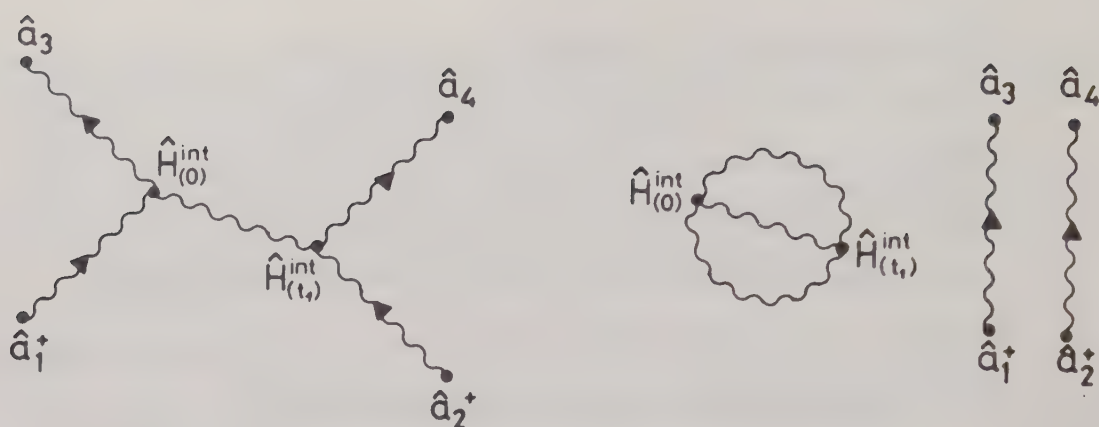
oder *disconnected*. Die *verbundenen* und *unverbundenen* Operatorkombinationen faktorisieren und nach dem Goldstone Theorem (Go 54) müssen nur die *verbundenen* Beiträge betrachtet werden (vgl. Abschnitt 4.2 Gl.(4.19a,b)). Das Subskript *connected* bedeutet also in dieser Terminologie, daß jeder Operator mit jedem anderen durch Propagatoren und Vertizes verbunden ist.

In Figur 4.2 sind die Begriffe *verbunden* ubzw. *unverbunden* am Beispiel der $O(g^2)$ -Wechselwirkung zweier Gluonen illustriert.

Figur 4.2: (nachfolgende Seite)

Illustration der Begriffe *verbunden* (*connected*) bzw. *unverbunden* (*disconnected*) am Beispiel der Gluon-Gluon Wechselwirkung in zweiter Ordnung $O(g^2)$.

- (a) Verbundenes Diagramm : Jeder Operator ist mit jedem anderen durch Vertizes und Linien verbunden
- (b) Unverbundenes Diagramm : Die Operatoren $\hat{H}^{int}(0)$ und $\hat{H}^{int}(t_1)$ sind zwar untereinander verbunden nicht jedoch mit den äußeren Operatoren $\hat{a}_1^+, \hat{a}_2^+, \hat{a}_3, \hat{a}_4$.



Die Quintessenz dieser Analyse ist : Ein beliebiger Wechselwirkungsprozeß der n -ten Ordnung in g^2 läßt sich als ein entsprechendes Feynman-Diagramm darstellen, welches aus elementaren, verbundenen Teildiagrammen zusammengesetzt ist; oder umgekehrt, durch Aneinanderfügen solcher elementarer Diagramme kann jeder mögliche Wechselwirkungsprozeß nach dem Baukastenprinzip aufgebaut werden. Jedem dieser grundlegenden Diagramme entspricht ein bestimmter analytischer Ausdruck. Die praktische Berechnung des Matrixelementes (4.44) bzw. (4.48) reduziert sich somit auf die Übersetzung des dem Matrixelement entsprechenden Feynman-Diagramms in die analytische Sprache, wobei die Feynman-Regeln das Wörterbuch dazu bereitstellen.

Das gerade erläuterte Konzept der anschaulichen Darstellung einer Quantenfeldtheorie durch Feynman-Diagramme und dazugehörigen Rechenregeln ist wohlbekannt und im Prinzip universell durchführbar. Die spezifische Struktur der hier betrachteten Theorie spiegelt sich in der charakteristischen Form der Feynman-Regeln wieder : Die Feynman-Regeln für die in der Kavität eingesperrten QCD mit Randbedingungen sind im wesentlichen dieselben wie für

die freie, d.h. räumlich unbeschränkte, QCD. Der entscheidende Unterschied zur freien QCD tritt in den durch die Randbedingungen (4.23)-(4.25) bestimmten Ausdrücken für den Hamiltonoperator (3.40)-(3.42) und die Feldoperatoren (4.26), (4.27), (4.31), (4.39) und (4.40) zutage, die ja in das Matrixelement (4.44) bzw. (4.50) eingehen. Zudem resultieren aus den Randbedingungen für die sphärische Kavität bestimmte Symmetrieeigenschaften, die sich von denen der QCD im unbeschränkten Raum unterscheiden.

Diese charakteristischen Unterschiede bedürfen folgender Erläuterungen:

(a) *Vertizes und Propagatoren :*

Die Vertizes beschreiben die *lokale* Wechselwirkung und werden folglich nicht durch die Einführung von Randbedingungen modifiziert. Im Gegensatz dazu bestimmen die Propagatoren und Wellenfunktionen die Ausbreitung der Teilchen im Raum, d.h. hier geht die spezifische räumliche Geometrie ein. Wir können daher die üblichen Feynman-Regeln der freien QCD übernehmen und müssen überall die freien Propagatoren und Wellenfunktionen durch ihre räumlich eingesperrten, den Randbedingungen der Kavität genügenden, Gegenstücke ersetzen.

(b) *Zeit - Translationsinvarianz :*

Als Folge der statischen Approximation (vgl. Abschnitt 4.2) ist die Theorie gegenüber Zeit-Translationen invariant und die Energie bleibt erhalten. Diese Symmetrieeigenschaft erlaubt es uns, von der Raum-Zeit-Darstellung $(\vec{x}, t)$ zu einer Raum-Energie-Darstellung $(\vec{x}, \omega)$ durch zeitliche Integration an jedem Vertex überzugehen. Die Energie ist an jedem Vertex erhalten.

(c) *Rotationsinvarianz* :

Die sphärische Symmetrie der Kavität erlaubt es uns, das Wigner-Eckhardt Theorem (siehe z.B. Ed 64) anzuwenden und die Integration über die Raumwinkel durch Summation über die an den Vertizes ein- und auslaufenden Drehimpulse einzutauschen. Der Gesamtdrehimpuls ist an jedem Vertex erhalten.

(d) *Struktur der Wechselwirkung* :

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften (a) und (b) ergibt sich folgende Struktur der Wechselwirkungs-Vertizes :

Jeder Vertex enthält

- i. eine *radiale Integration* $\int_0^R r^2 dr$ (R = Radius der Kavität)
- ii. einen rein *geometrischen Faktor*, nämlich eine Kombination von Wigner-Koeffizienten als Folge des Wigner-Eckhardt Theorems und der Drehimpulserhaltung
- iii. eine *reduzierte Vertexfunktion*, welche die eigentliche Physik der Wechselwirkung beschreibt und die vom Gesamtdrehimpuls j , dem relativen Bahndrehimpuls l , nicht jedoch von der z -Komponente des Drehimpulses j_z abhängt
- iv. eine *Summation* über alle mit den obigen Symmetrieeigenschaften verträglichen Quantenzahlen.

4.4 Feynman Regeln

Die Zusammenfassung der Betrachtungen in den vorangegangenen Abschnitten ist die Formulierung der Feynman-Regeln für die QCD innerhalb einer statischen sphärischen Kavität unter Berücksichtigung von Randbedingungen.

Die Regeln lauten wie folgt :

1. Diagramme

- In der n -ten Ordnung Störungstheorie zeichne man alle möglichen, topologisch verschiedenen Feynman Diagramme $\sim (g^2)^n$, welche die vorgegebene Anzahl von Teilchen im Anfangs- und Endzustand haben.
- Jedes Diagramm erhält einen *statistischen Wichtungsfaktor* $S = \prod_k \frac{1}{g_k!}$, wenn im Endzustand g_k identische Teilchen der Sorte k vorhanden sind, sowie ein *absolutes Vorzeichen* entsprechend der Permutation der äußeren Quarklinien.
- Jede Linie erhält eine Richtung :

Die Richtungspfeile an den Quark- und Geister-Linien müssen konsistent sein, d.h. ein *einlaufendes* und ein *auslaufendes* Quark bzw. Geist an jedem Vertex. Die Pfeile an den Gluon-Linien sind willkürlich.

• Graphische Notation :

Linien :

Quark



Gluon (raum-/zeitartig)

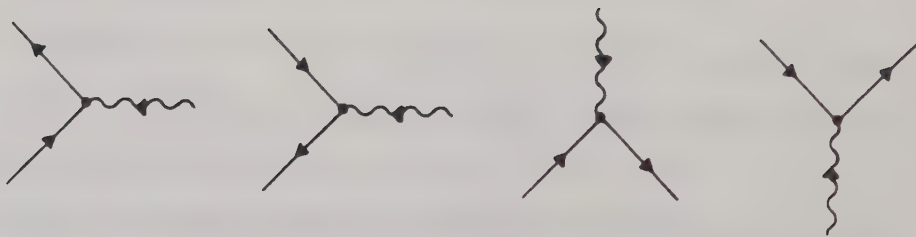


Geist

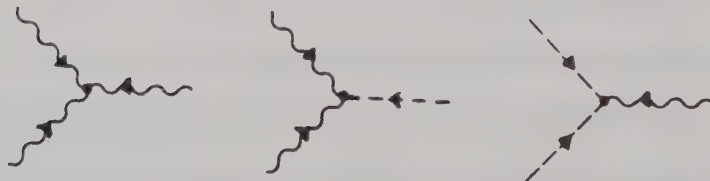


Vertizes :

Quark - Gluon



3 - Gluon



4 - Gluon



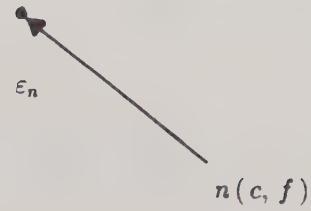
Geist - Gluon



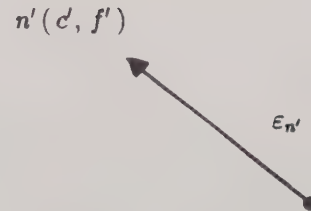
2. Äußere Linien

(a) *Quarks* :

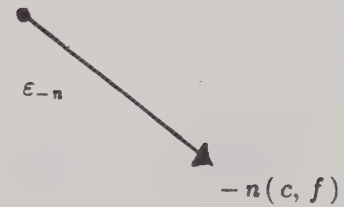
einlaufendes Quark



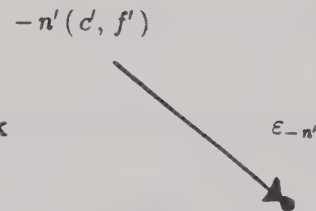
auslaufendes Quark



einlaufendes Antiquark



auslaufendes Antiquark



$$n = (f, \nu, \kappa, \mu)$$

$$-n = (f, -\nu, -\kappa, -\mu)$$

f : Flavour

ν : Radiale Quantenzahl

κ : Drehimpuls-Spin Quantenzahl

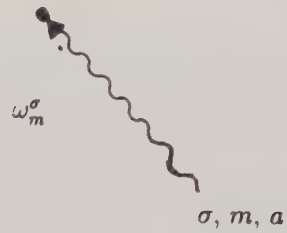
μ : Magnetische Quantenzahl

c : Farbindex $c = 1, 2, 3$

$$\epsilon_n = \text{sign}(\nu) \cdot \sqrt{p_n^2 + m_f^2}; \quad \epsilon_{-n} = -\epsilon_n$$

(b) *Gluonen* :

einlaufendes Gluon :



$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\omega_m^\sigma}}$$

auslaufendes Gluon :

σ, m^*, a



$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\omega_{m^*}^\sigma}}$$

$$\sigma = (\text{TE}, \text{TM})$$

$$m = (N, J, M)$$

$$m^* = (N, J, -M)$$

σ : Polarisation

N : Radiale Quantenzahl

J : Drehimpuls

a : Farb-Index $a = 1, \dots, 8$

3. Innere Linien (Propagatoren)

(a) Quark - Propagator :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 x & \xleftarrow{p} & y \\
 (c', f') & & (c, f)
 \end{array}
 \equiv
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} p \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}
 & +
 &
 \begin{array}{c} -p \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\
 x^0 > y^0 & & x^0 < y^0
 \end{array}
 \\
 \Rightarrow \quad \delta_{cc'} \delta_{ff'} \cdot \left[\frac{1}{\epsilon_p - \Delta E_y} - \frac{1}{\epsilon_p - \Delta E_x} \right]
 \end{array}$$

(b) Gluon - Propagator :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 x & \xleftarrow{\sigma, m} & y \\
 a' & & a
 \end{array}
 \equiv
 \begin{array}{cc}
 \begin{array}{c} m \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}
 & +
 &
 \begin{array}{c} m^* \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \\
 x^0 > y^0 & & x^0 < y^0
 \end{array}
 \\
 \Rightarrow \quad \delta_{aa'} \frac{g^{\sigma\sigma}}{2\omega_m^\sigma} \cdot \left[\frac{1}{\omega_m^\sigma - \Delta E_y} + \frac{1}{\omega_m^\sigma - \Delta E_x} \right]
 \end{array}$$

Polarisations Tensor $g^{\sigma\sigma}$:

$$g^{\sigma\sigma} = \begin{cases} 1 & \sigma = S \\ -1 & \sigma = L \\ -1 & \sigma = TE \\ -1 & \sigma = TM \end{cases}$$

$$g^{\sigma\sigma'} = 0 \quad \sigma \neq \sigma'$$

(c) Geister - Propagator :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} x \cdots \cdots \leftarrow \cdots \cdots y \\ \sigma = S, m \\ a' \qquad \qquad \qquad a \end{array} & \equiv & \begin{array}{c} m \\ \text{diagram 1} \\ x^0 > y^0 \end{array} + \begin{array}{c} m^* \\ \text{diagram 2} \\ x^0 < y^0 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow i \delta_{aa'} \frac{1}{2\omega_m^S} \cdot \left[\frac{1}{\omega_m^S - \Delta E_y} + \frac{1}{\omega_m^S - \Delta E_x} \right]$$

4. Vertizes :

a) Quark-Gluon Vertizes

(i) Quark - Quark - Gluon :

$$\begin{array}{c} n', c' \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad m, a \quad \Rightarrow \quad g \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{c'c} \cdot Q_{n', n, m} \quad [\rightarrow \text{Gl.(B21)}]$$

$$\begin{array}{c} n, c \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad m^*, a \quad \Rightarrow \quad g \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{c'c} \cdot \tilde{Q}_{n', n, m} \quad [\rightarrow \text{Gl.(B22)}]$$

(ii) Antiquark - Antiquark - Gluon :

$$\begin{array}{c} -n', c' \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad m, a \quad \Rightarrow \quad g \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{cc'} \cdot Q_{-n, -n', m} \quad [\rightarrow \text{Gl.(B21)}]$$

$$\begin{array}{c} -n, c \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad m^*, a \quad \Rightarrow \quad g \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{cc'} \cdot \tilde{Q}_{-n, -n', m} \quad [\rightarrow \text{Gl.(B22)}]$$

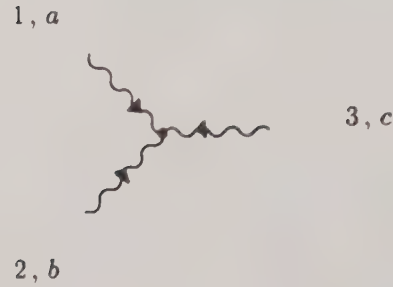
(iii) Quark - Antiquark - Gluon :

$$\begin{array}{c} n, c \quad -n', c' \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \downarrow \end{array} \quad m, a \quad \Rightarrow \quad g \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{cc'} \cdot Q_{n, -n', m} \quad [\rightarrow \text{Gl.(B21)}]$$

$$\begin{array}{c} m^*, a \\ \downarrow \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \end{array} \quad \Rightarrow \quad g \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)_{c'c} \cdot \tilde{Q}_{-n', n, m} \quad [\rightarrow \text{Gl.(B22)}]$$

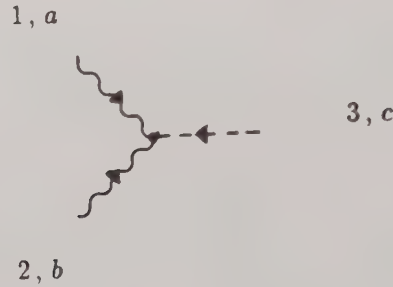
b) 3-Gluon Vertizes :

(i) 3 raumartige Gluonen



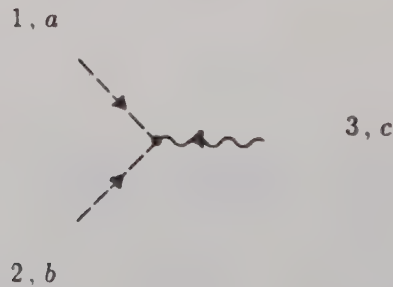
$$\Rightarrow \frac{-ig}{\sqrt{4\pi R}} f^{abc} \cdot \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{RRR}(J_1, J_2, J_3, L_1, L_2, L_3) \quad [\rightarrow \text{Gl. (B34)-(B36)}]$$

(ii) 2 raumartige Gluonen,
1 zeitartiges Gluon



$$\Rightarrow \frac{-ig}{\sqrt{4\pi R}} f^{abc} \cdot \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{RRT}(J_1, J_2, J_3, L_1, L_2) \quad [\rightarrow \text{Gl. (B38)-(B40)}]$$

(iii) 1 raumartiges Gluon,
2 zeitartige Gluonen



$$\Rightarrow \frac{-ig}{\sqrt{4\pi R}} f^{abc} \cdot \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{TTR}(J_1, J_2, J_3, L_1, L_2, L_3) \quad [\rightarrow \text{Gl. (B42)-(B44)}]$$

c) 4-Gluon Vertizes :

(i) 4 raumartige Gluonen

3, c

4, d



$$\Rightarrow -g^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left(f_{adx} f_{bcx} - f_{acx} f_{dbx} \right) \cdot F_{13,24} \\ & + \left(f_{abx} f_{cdx} - f_{adx} f_{bcx} \right) \cdot F_{12,34} \\ & + \left(f_{acx} f_{dbx} - f_{abx} f_{cdx} \right) \cdot F_{14,23} \end{aligned} \right\}$$

1, a

2, b

$$= -g^2 \cdot f_{acx} f_{bdx} \cdot (2 F_{13,24} - F_{12,34} - F_{14,23})$$

[$\rightarrow$ Gl.(B47)-(B50)]

(ii) 2 raumartige Gluonen,

2 zeitartige Gluonen

3, c

4, d



$$\Rightarrow -g^2 \cdot \left(f_{adx} f_{bcx} - f_{acx} f_{dbx} \right) \cdot G_{12,34}$$

[$\rightarrow$ Gl.(B51)-(B54)]

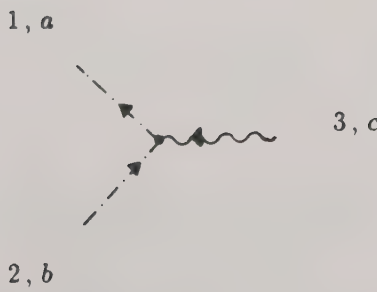
1, a

2, b

d) Geist-Gluon Vertizes :

(i) 2 Geister,

1 raumartiges Gluon

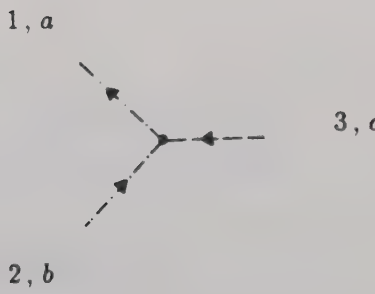


$$\Rightarrow \frac{-ig}{\sqrt{4\pi R}} f^{abc} \cdot \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{GGR}(J_1, J_2, J_3, J_4)$$

[$\rightarrow$ Gl.(B58),(B59)]

(ii) 2 Geister,

1 zeitartiges Gluon



$$\Rightarrow \frac{-ig}{\sqrt{4\pi R}} f^{abc} \cdot \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{GGT}(J_1, J_2, J_3, J_4)$$

[$\rightarrow$ Gl.(B60),(B61)]

e) Für jedes aus einem Vertex herauslaufendes Gluon i substituiere

$$M_i \rightarrow -M_i$$

und multipliziere mit einem Faktor

$$\eta^{\sigma_i} \cdot (-1)^{M_i} ; \quad \eta^\sigma = \begin{cases} +1 & \text{für } \sigma = L, TE \\ -1 & \text{für } \sigma = S, TM \end{cases}$$

5. Summation über 'innere' Quantenzahlen :

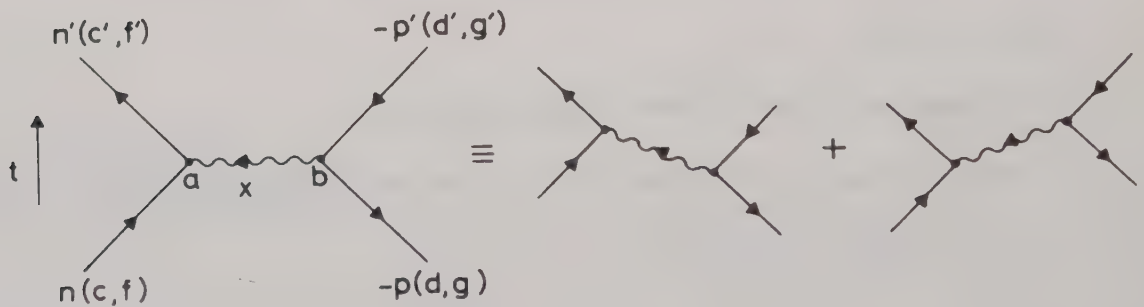
Für jede innere Linie (Propagator) summiere man über alle möglichen virtuellen Zwischenzustände, d.h.

<i>Quarks:</i>		$\Rightarrow$	$\sum_{\substack{\kappa, \mu \\ \nu > 0}}$
	ν, κ, μ		
<i>Gluonen:</i>		$\Rightarrow$	$\sum_{\substack{J, M \\ N > 0 \\ \sigma = S, L, TE, TM}}$
	N, J, M, σ		
<i>Geister:</i>		$\Rightarrow$	$\sum_{\substack{J, M \\ N > 0}}$
	N, J, M		

4.5 Praktische Anwendung der Feynman Regeln

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir die praktische Anwendung der Feynman Regeln an zwei illustrativen Beispielen vorführen. Dazu betrachten wir die Quark-Antiquark und die Gluon-Gluon Wechselwirkung durch Austausch eines virtuellen Gluons. Diese beiden Wechselwirkungsprozesse sind von zweiter Ordnung in der Kopplungskonstanten g , d.h. proportional g^2 , und entsprechen den Feynman-Diagrammen in Figur 4.1(I) bzw. Figur 4.1(III).

4.5.1 Quark-Antiquark Wechselwirkung via Gluon-Austausch



Das Diagramm besteht im wesentlichen aus zwei Quark-Gluon Vertizes, die durch den Gluon-Propagator verbunden sind. Das Antiquark wird durch ein rückwärts in der Zeit laufendes Quark mit negativer Energie repräsentiert. Die beiden möglichen Zeitordnungen für die Emission und Absorption des ausgetauschten Gluons an den Vertizes werden im Gluon-Propagator berücksichtigt.

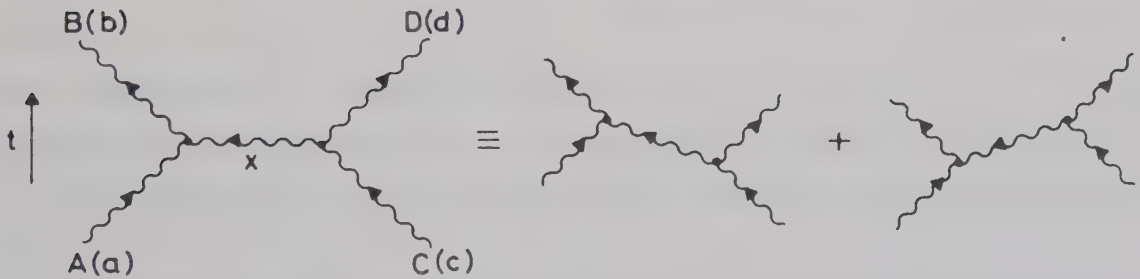
Die Buchstaben an den Linien bezeichnen die Quantenzahlkombinationen, welche die Zustände spezifizieren, in denen sich Quark, Antiquark, bzw. Gluon befinden.

Unter Verwendung der Feynman Regeln aus dem vorangegangenen Abschnitt 4.4 läßt sich der entsprechende Wechselwirkungs-Operator sofort angeben:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{q\bar{q}}^{(EX)} = & \delta_{f'f} \delta_{g'g} \cdot \sum_{\substack{n_x, j_x, m_x \\ \sigma_x}} \left[g \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'c} \cdot Q_{n', n, x}^{\sigma_x} \right. \\
& \times \delta^{ab} \frac{g^{\sigma_x \sigma_x}}{2 \omega_x^{\sigma_x}} \cdot \left(\frac{1}{\omega_x^{\sigma_x} - (\varepsilon_n - \varepsilon_{n'})} + \frac{1}{\omega_x^{\sigma_x} - (\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})} \right) \\
& \times \left. g \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2} \right)_{dd'} \cdot \tilde{Q}_{-p, -p', x}^{\sigma_x} \right]
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Was zu tun verbleibt, ist die Bildung von Matrixelementen dieses Operators mit bestimmten Bag-Eigenzuständen des Quark-Antiquark Paares im Anfangs- und Endzustand. Die numerische Auswertung der Matrixelemente geschieht durch Einsetzen der expliziten Ausdrücke für die Vertexfunktionen $Q_{n', n, x}^{\sigma_x}$, $\tilde{Q}_{-p, -p', x}^{\sigma_x}$ und durch Berechnung des Color-Faktors $\left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'c} \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2} \right)_{dd'} \delta^{ab}$. Die Details dieser Prozedur sind ausführlich in Anhang C und D vorgeführt.

4.5.2 Gluon-Gluon Wechselwirkung via Gluon-Austausch



Dieses Diagramm, wie im übrigen die Wechselwirkung zwischen Gluonen allgemein, ist charakteristisch für die QCD als nicht-abelsche Eichtheorie. Eine analoge 'Photon-

Photon Wechselwirkung' in der QED gibt es nicht, weil die Photonen selbst elektrisch neutral sind.

Das obige Diagramm unterscheidet sich von dem vorangegangenen Quark-Antiquark Diagramm lediglich dadurch, daß die äußeren Linien durch zwei einlaufende bzw. zwei auslaufende Gluonen ersetzt sind. Die Übersetzung des Diagramms in die analytische Sprache gemäß den Feynman Regeln ist analog zum vorangegangenen Beispiel und ergibt für den entsprechenden Wechselwirkungs-Operator

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{gg}^{(EX)} = & \sum_{n_x, j_x, m_x} \left[\frac{\eta^{\sigma_B} (-1)^{M_B}}{\sqrt{2\omega_B^{\sigma_B}} \sqrt{2\omega_A^{\sigma_A}}} \frac{(-ig)}{\sqrt{4\pi R}} f^{ba_x} \cdot \begin{pmatrix} J_B & J_X & J_A \\ -M_B & M_X & M_A \end{pmatrix} \cdot V^{\sigma_B \sigma_X \sigma_A} \right. \\
& \times \eta^{\sigma_X} (-1)^{M_X} \frac{g^{\sigma_z \sigma_z}}{2\omega_x^{\sigma_z}} \cdot \left(\frac{1}{\omega_x^{\sigma_z} - (\omega_A^{\sigma_A} - \omega_B^{\sigma_B})} + \frac{1}{\omega_x^{\sigma_z} - (\omega_C^{\sigma_C} - \omega_D^{\sigma_D})} \right) \\
& \times \left. - \frac{\eta^{\sigma_D} (-1)^{M_D}}{\sqrt{2\omega_D^{\sigma_D}} \sqrt{2\omega_C^{\sigma_C}}} \frac{(-ig)}{\sqrt{4\pi R}} f^{cd_x} \cdot \begin{pmatrix} J_D & J_X & J_C \\ -M_D & -M_X & M_C \end{pmatrix} \cdot V^{\sigma_D \sigma_X \sigma_C} \right]
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Für die explizite Berechnung dieses Ausdrucks verbleibt das Einsetzen der reduzierten Vertexfunktionen $V^{\sigma_B \sigma_X \sigma_A}$, $V^{\sigma_D \sigma_X \sigma_C}$, sowie die Auswertung des Color-Faktors f^{ba_x} f^{cd_x} und diverser 3j-, 6j-, 9j-Drehimpulskoeffizienten. Dies geschieht durch Bildung von Matricelementen des Operators $\hat{V}$ mit bestimmten externen 2-Gluon Zuständen. Die einzelnen Schritte sind in Anhang C und D im Detail ausgeführt.

Anhand dieser beiden Beispiele sollte die Anwendung der Feynman Regeln klar sein. Die Berechnung der anderen Diagramme aus Figur 4.1, die für die Beschreibung von Glueballs im weiteren von Bedeutung sein werden, verläuft nach demselben Rezept und ist in Anhang C und D erläutert.

5 Das Modell - vereinheitlichte Beschreibung von Glueballs, Mesonen und Baryonen

In diesem Kapitel stelle ich das Modell vor, das ich der Phänomenologie der Glueballs und Hadronen zugrunde legen werde.

Wie mehrfach betont ist es unumgänglich auf approximative Modelle zurückzugreifen, da es aufgrund der komplexen Struktur der QCD bislang nicht möglich ist, die Spektroskopie, Struktur und Eigenschaften stark wechselwirkender Objekte rigoros aus den Grundprinzipien der Theorie abzuleiten. Das im folgenden präsentierte Modell ist im wesentlichen eine *Erweiterung des MIT - Bag Modells*. Es wurde versucht, zum einen möglichst viele Grundzüge der QCD zu berücksichtigen und zum anderen die experimentell beobachteten Eigenschaften der starken Wechselwirkung adäquat zu beschreiben. Dieses Modell schafft, so glaube ich, eine vertrauenswürdige Basis für eine konkrete und glaubhafte Beschreibung von Glueballs und erlaubt, definitive Vorhersagen zu treffen.

5.1 Grundzüge des Bag Modells

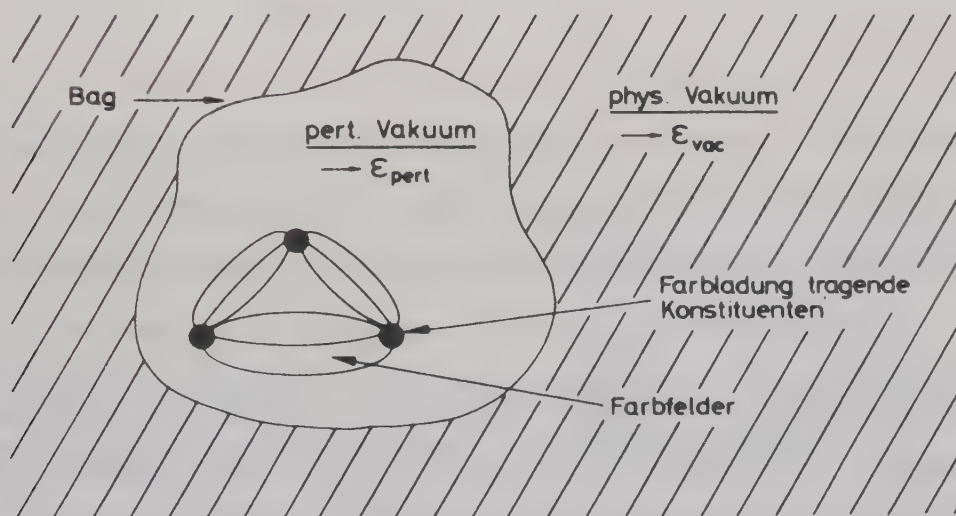
Das Modell, das ich nun vorstellen möchte, basiert wie gesagt auf dem *MIT - Bag Modell* (Ch 74, DeG 75) und ist eine Formulierung, welche die experimentell beobachteten Eigenschaften der starken Wechselwirkung (vgl. Kap.2) in relativistischer, lokaler und eichinvarianter Form beschreibt, nämlich

1. *Innere Struktur physikalischer Teilchen* : Hadronen, Glueballs, etc. sind zusammengesetzt aus einzelnen Konstituenten - den Quarks bzw. Gluonen - die sich im Innern des Hadrons bzw. Glueballs bewegen und miteinander wechselwirken.
2. *Asymptotische Freiheit* : Die effektive Wechselwirkung zwischen Quarks bzw. Gluonen bei kleinen Relativabständen ($\ll 1 \text{ fm}$) läßt sich im Rahmen der störungstheoretischen QCD beschreiben.
3. *Confinement* : Hadronen, Glueballs, etc. sind 'farblose' Objekte, d.h. sie können nur aus solchen Kombinationen von Quarks bzw. Gluonen bestehen, die ein Color-Singlett bilden.

Der Vorzug des Bag Modells ist, daß es besonders transparent ist. Außerdem lassen sich nicht nur die Grundzustände, sondern auch höhere Anregungen, sowie Größen, die direkt mit der Form der Quark- und Gluon-Wellenfunktionen zusammenhängen (z.B. magnetische Momente, Zerfallsbreiten usw.) berechnen. Da das Bag Modell trotz seiner Einfachheit relativ erfolgreiche Vorhersagen über das Hadron-Spektrum zu treffen erlaubt, kann man hoffen, daß auch die Eigenschaften von Glueballs adäquat beschrieben werden. Insofern erscheint es sinnvoll, die Glueballs ebenso im Rahmen des Bag Modells theoretisch zu erfassen, auch wenn es in seiner Anwendbarkeit

durchaus begrenzt ist. Die Schwachstellen des Modells werde ich versuchen klar herauszustellen.

Im Bild des Bag Modells wird angenommen, daß im Innern der Hadronen, Glueballs, etc. ein *störungstheoretisches Vakuum* existiert, wo die Wechselwirkung der Konstituenten relativ schwach ist. Das *physikalische Vakuum* im Außenbereich dagegen ist von komplexer Natur und wird charakterisiert durch eine Energiedichte, die kleiner ist als die im Innern von physikalischen Teilchen. Die Differenz der beiden Vakua, innen und außen, bedingt daher einen *Vakuumdruck B* , der von außen auf die Teilchen wirkt und so das Confinement der Konstituenten bewirkt.



Figur 5.1

Intuitives Bild der Hadronen bzw. Glueballs im Bag Modell : Im Inneren existiert ein perturbatives Vakuum mit konstanter Energiedichte ϵ_{pert} , wohingegen im Außenbereich das physikalische Vakuum mit Energiedichte ϵ_{vac} herrscht. Die Differenz $|\epsilon_{\text{pert}} - \epsilon_{\text{vac}}| \equiv B$ bedingt einen Vakuumdruck B .

Hadronen bzw. Glueballs werden demnach als Blasen des störungstheoretischen Vakuums angesehen, die in ein komplexes Medium, das physikalische Vakuum, eingebettet sind. Diese Idee zweier Phasen des Vakuums läßt sich feldtheoretisch formulieren durch die Lagrange-Dichte des Bag-Modells. Die *Bag Lagrange-Dichte* ist (Ch 74):

$$\mathcal{L}_{BAG} = [\mathcal{L}_{QCD} - B] \theta_V(x) \quad (5.1)$$

mit der resultierenden Wirkung

$$W = \int d^4x \mathcal{L}_{BAG} \quad (5.2)$$

wobei $\theta_V(x) = 1$, $x \in V$ bzw. 0 , $x \notin V$ und V das vierdimensionale Raum-Zeit Volumen, in welchem sich die Quarks und Gluonen aufhalten, bezeichnet. $\mathcal{L}_{QCD}$ steht für die vollständige Lagrangedichte der QCD, (3.15)-(3.19), und B ist der Vakuumdruck.

Die Lagrangedichte (5.1) definiert eine Poincaré- und eichinvariante Theorie der Hadronen bzw. Glueballs und ihrer Wechselwirkungen. Da jedoch die entsprechende Wirkung (5.2) eine Integration über den endlichen Bereich V erfordert, muß die Bag-Oberfläche selbst als dynamisches Feld betrachtet werden, das an die Quark- und Gluon-Felder gekoppelt ist. Das daraus resultierende System nichtlinearer gekoppelter Bewegungsgleichungen macht eine rigorose quantentheoretische Formulierung von (5.1) schwierig. Stattdessen verwendet man die naheliegende *Approximation der statischen Kavität*, in welcher die Bag-Oberfläche als im Raum 'festgefroren' betrachtet wird. Diese sogenannte *static cavity approximation* ist im Grunde synonym mit dem

MIT Bag Modell.

Hier schließt sich der Kreis zu dem in den Kapiteln 3 und 4 entwickelten Formalismus der QCD innerhalb einer statischen Kavität :

Die Variation der Wirkung (5.2) bezüglich der Quark-, Gluon- und Geister-Felder liefert gerade die Bewegungsgleichungen (3.27) - (3.31) für die Felder im Innern des Bags, sowie die linearen Randbedingungen (4.23) - (4.25) auf der Bag Oberfläche, welche die Erhaltung der Farbströme im Bag erzwingen, so daß der Bag als Ganzes ein Color-Singlett ist. Zusätzlich führt die Variation von (5.1) bezüglich des Volumens V auf eine nichtlineare Randbedingung auf der Bag Oberfläche S :

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} + \frac{1}{2} n_\mu \partial^\mu (\bar{\psi} \psi) - B|_S = 0 \quad (5.3)$$

Diese sogenannte *quadratische Randbedingung* erzwingt, daß sich der innere, kinetische Druck der Konstituenten im Bag stets mit dem äußeren Vakuumdruck B im Gleichgewicht befindet und gewährleistet, daß der Bag als Ganzes stabil ist.

In der statischen Approximation ist diese Bedingung äquivalent zu der Forderung, daß die Energie als Funktion des Bagradius R ein Minimum annimmt :

$$\frac{dE(R)}{dR} = 0 \quad \leadsto \quad E_{BAG} \equiv E(R_0) \quad (5.4)$$

Gleichung (5.4) bestimmt gleichzeitig die Energie sowie den Gleichgewichtsradius R_0 und entspricht der Bedingung (5.3) im zeitlichen Mittel.

Aus (5.2) erhält man den Hamiltonoperator für die statische Kavität $\hat{H}_{BAG}$, der sich entsprechend (5.1) zusammensetzt aus dem voll quantisierten QCD-Hamiltonoperator

$\hat{H}_{QCD}$ (3.42) für die Quarks, Gluonen und Geister innerhalb des Bags und einem klassischen Anteil $\hat{H}_{VAC}$, der das äußere, physikalische Vakuum beschreibt :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BAG} &\equiv \hat{H}_{QCD} + \hat{H}_{VAC} \\ \text{mit } \hat{H}_{QCD} &\equiv \int_V d^3x (\hat{\mathcal{H}}^o + \hat{\mathcal{H}}^{int}) \\ \hat{H}_{VAC} &\equiv \int_V d^3x B \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dabei ist $\hat{\mathcal{H}}^o$ bzw. $\hat{\mathcal{H}}^{int}$ der ungestörte Anteil bzw. der Wechselwirkungsanteil der QCD-Hamiltondichte gemäß (3.40) bzw. (3.41).

Die Gesamtenergie des Bags als Funktion des Bag Volumens, $E_{BAG}(R)$, ergibt sich dann durch Bildung des Erwartungswertes von $\hat{H}_{BAG}$ mit den ungestörten Quark- bzw. Gluon-Zuständen der Kavität aus Kapitel 4, Gl. (4.26), (4.27) und (4.31).

Die Stabilitätsbedingung (5.4) bestimmt den *Gleichgewichtsradius* R_o und damit $E_{BAG}(R_o)$, woraus sich wiederum die *Masse des Bags* M_{BAG} ergibt.

Neben der Berechnung von Massen erlaubt das obige Konzept ebenfalls Aussagen über magnetische Momente, elektromagnetische Ladungsradien, elektroschwache Eigenschaften sowie Zerfallsbreiten der Hadronen, Glueballs etc. zu treffen.

Zusammenfassend halten wir fest :

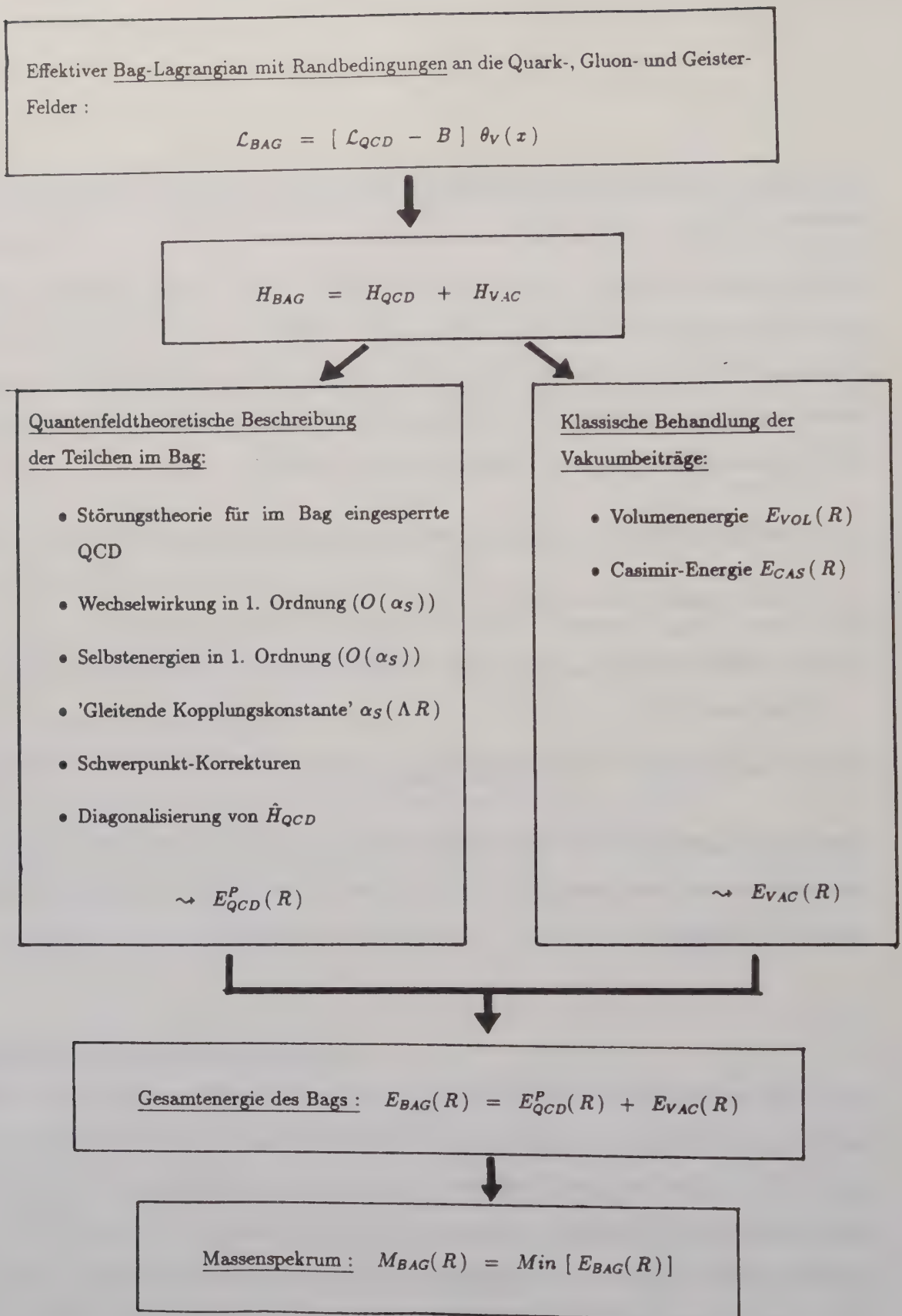
Die statische Approximation der durch (5.1) definierten relativistischen und eichinvarianten Theorie bildet das Fundament unserer phänomenologischen Beschreibung von Glueballs und Hadronen. Die kurzreichweitigen Eigenschaften der QCD werden voll quantentheoretisch durch $\mathcal{L}_{QCD}$ und den störungstheoretischen Formalismus für die QCD innerhalb einer statischen Kavität entsprechend Kapitel 4 erfaßt. Die langreichweitigen, nicht-störungstheoretischen Effekte (der Confinement Charakter) der

Theorie werden dagegen auf die quasi-klassische Weise durch den Vakuumdruck $\mathcal{B}$ repräsentiert.

Dieses Konzept des Bag Modells in der statischen Approximation erlaubt die Beschreibung von Massen und anderer observabler Größen der stark wechselwirkenden Teilchen. Es bildet den groben Rahmen für unser Modell. Wir werden das obige naive Modell dahingehend erweitern, daß wir *zusätzliche physikalisch bedeutsame Elemente* einbauen; insbesondere werden wir berücksichtigen:

- Konfigurationsmischungen verschiedener Anregungszustände
- Selbstenergie - Korrekturen für Quarks und Gluonen
- die Eigenschaft der asymptotischen Freiheit der QCD ('gleitende Kopplungskonstante')
- Korrekturen zur Schwerpunktbewegung des Bags

Figur 5.2 veranschaulicht unsere Vorgehensweise und stellt die spezifischen Details des erweiterten Modells heraus. Die einzelnen Elemente werden im folgenden Abschnitt eingehend erläutert.



Figur 5.2 :

Schematische Darstellung des in dieser Arbeit verfolgten Konzepts zur Erweiterung des Bag Modells (siehe Abschnitt 5.2)

5.2 Erweiterung und Verbesserung des naiven Bag Modells

Zur phänomenologischen Untersuchung der Eigenschaften von Hadronen und Glueballs betrachten wir den Bag als zusammengesetztes System von untereinander wechselwirkenden Konstituenten (Quarks und Gluonen). Wir untersuchen die folgenden drei Konfigurationen

- a) $q\bar{q}$ - System $\Rightarrow$ Mesonen
- b) qqq - System $\Rightarrow$ Baryonen (5.6)
- c) gg - System $\Rightarrow$ Glueballs mit zwei Valenz-Gluonen

5.2.1 Energie der Konstituenten im Bag in 1.Ordnung Störungstheorie

(i) Dimension des Hilbertraums :

Statt der i.a. üblichen Beschränkung auf die niedrigste Eigenschwingung für die Quarks und Gluonen im Bag, erweitern wir den Hilbertraum des zusammengesetzten Systems dahingehend, daß *jedes* Quark bzw. Gluon - sowohl die reellen Konstituenten, als auch die virtuellen, die Wechselwirkung vermittelnden, Quarks und Gluonen - neben dem Grundzustand auch höhere Anregungen annehmen können.

- Für die *Quarks* berücksichtigen wir die niedrigsten 5 radialen Eigenmoden, sowohl mit $k = -1$ als auch $k = +1$.
- Für die *Gluonen* betrachten wir die niedrigsten 5 radialen Zustände sowohl mit Drehimpuls $j = 1$ als auch $j = 2$.

Der Hilbertraum des zusammengesetzten Systems von Konstituenten enthält also je nach Konfiguration (5.6a - 5.6c) die Gesamtheit der folgenden Zustände (vgl. Figur 5.3) :

$$\begin{aligned}
 a) \quad | q_1 \bar{q}_2 >_\alpha &\equiv \left[\hat{a}_1^+ \hat{b}_2^+ \right]^{(J^{PC}, Color 0)} | \hat{0} > \\
 b) \quad | q_1 q_2 q_3 >_\alpha &\equiv \left[\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{a}_3^+ \right]^{(J^P, Color 0)} | \hat{0} > \\
 c) \quad | g_1 g_2 >_\alpha &\equiv \left[\hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ \right]^{(J^{PC}, Color 0)} | \hat{0} >
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Dabei sind $\hat{a}_i^+$, $\hat{b}_i^+$ bzw. $\hat{c}_i^+$ die Erzeugungsoperatoren für ein Quark, Antiquark bzw. Gluon im Zustand i aus Kapitel 4, Abschnitt 4.2. Der Index i steht für die entsprechenden Sätze von Quantenzahlen. $|\hat{0} >$ bezeichnet das störungstheoretische Vakuum im Innern des Bags.

Die Zustände (5.7a - 5.7c) sind *physikalische Zustände*, d.h. sie genügen den 'Physikalitäts-Kriterien' (4.45)-(4.47), womit gewährleistet wird, daß die Theorie eichinvariant ist und observable Größen ausschließlich durch physikalische Freiheitsgrade bestimmt werden. Dies bedeutet, die Konstituenten sind zu wohldefiniertem Gesamtdrehimpuls J , Parität P und Ladungspartität C zusammengekoppelt und bilden insgesamt ein Color-Singlett. Ferner impliziert die Forderung (4.45) für den Zwei-Gluon-Zustand (5.7c), daß die beiden Valenz-Gluonen nur die beiden physikalischen

Polarisationen - nämlich die transversal elektrische (TE) und die transversal magnetische (TM) Polarisation - annehmen können.

Schließlich sind, gemäß (4.47), die Zustände (5.7a - 5.7.c) auf 1 normiert, d.h.

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha \beta} \quad (5.8)$$

wobei

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\equiv |q_1 \bar{q}_2\rangle_\alpha, & |q_1 q_2 q_3\rangle_\alpha, & & |g_1 g_2\rangle_\alpha \\ |\beta\rangle &\equiv |q_{1'} \bar{q}_{2'}\rangle_\beta, & |q_{1'} q_{2'} q_{3'}\rangle_\beta, & & |g_{1'} g_{2'}\rangle_\beta \end{aligned}$$

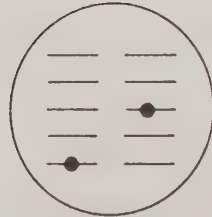
Figur 5.3 : (nachfolgende Seite)

Veranschaulichung der Bag-Zustände (5.7a-5.7c) als zusammengesetztes System der Konstituenten in einer bestimmten Konfiguration α , die durch die rechtstehenden Quantenzahlen der Teilchen definiert ist;

- Quarks: n_i = radiale Quantenzahl, κ_i = Bahndrehimpuls-Spin Projektion;
- Gluonen: n_i = radiale Quantenzahl, j_i = Drehimpuls, σ_i = Polarisation.

Konfiguration α :

a)

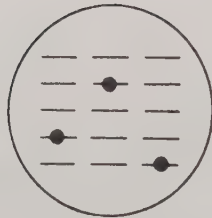


$(q_1 \bar{q}_2)\alpha$

$$n_i = 1, \dots, 5$$

$$\kappa_i = -1, +1$$

b)

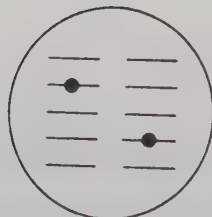


$(q_1 q_2 q_3)\alpha$

$$n_i = 1, \dots, 5$$

$$\kappa_i = -1, +1$$

c)



$(g_1 g_2)\alpha$

$$n_i = 1, \dots, 5$$

$$j_i = 1, 2$$

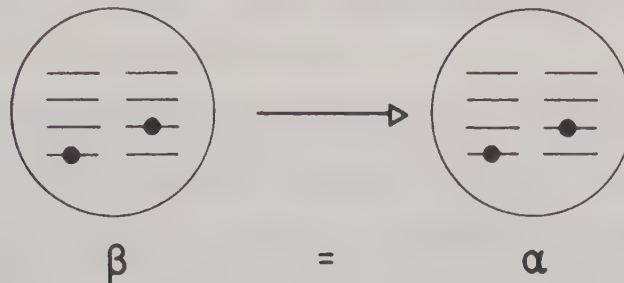
$$\sigma_i = TE, TM$$

(ii) **Diagonalisierung von $\hat{H}_{QCD}$:**

Die Energie-Eigenwerte und zugehörigen Eigenzustände ergeben sich wie in Abschnitt 4.3 erläutert aus der Diagonalisierung des Hamiltonoperators $\hat{H}_{QCD}$,

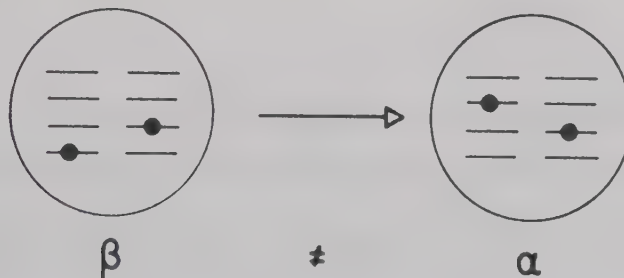
$$\langle \alpha | \hat{H}_{QCD} - E_{QCD} | \beta \rangle = 0 \quad (5.9)$$

Die *Diagonalelemente* $\alpha = \beta$



entsprechen den Wechselwirkungsamplituden, welche die direkte Wechselwirkung der Konstituenten untereinander beschreiben.

Die *außerdiagonalen Elemente* $\alpha \neq \beta$



sind dagegen als virtuelle Fluktuationen oder zwischenzeitliche Anregungen im Sinne der Unschärferelation zu interpretieren.

$$\begin{aligned}
E_{gg} &= \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two wavy lines labeled 1 and 2} \end{array} \right\rangle + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2: Two wavy lines connected by a gluon exchange} \\ \text{Diagram 3: Two wavy lines connected by a four-gluon vertex} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4: Wavy line with a gluon self-energy loop} \\ \text{Diagram 5: Wavy line with a ghost self-energy loop} \\ \text{Diagram 6: Wavy line with a ghost-gluon loop} \end{array} \right] \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram 7: Two wavy lines} \end{array} \right\rangle \\
&\quad (\cdot (1-2)) \tag{5.10c} \\
&= \frac{\omega_1 + \omega_2}{R} + \frac{\alpha_S(\Lambda R)}{R} \cdot \epsilon_I^{(gg)} + \frac{\alpha_S(\Lambda R)}{R} \cdot \epsilon_S^{(gg)}
\end{aligned}$$

Die Matrixelemente (5.10a)-(5.10c) für die Gesamtenergie der Systeme (5.6a)-(5.6c) skaliert mit $1/R$, da der Bag Radius R der charakteristische Längenparameter des Modells ist und daher die Energie festlegt.

Die Gesamtenergien (5.10a)-(5.10c) für das $q\bar{q}$ -, qqq -, bzw. gg - System setzen sich jeweils aus drei Beiträgen zusammen:

- Kinetische Energie : Der erste Term in den obigen Matrixelementen entspricht jeweils der freien kinetischen Energie der Konstituenten und ist einfach die Summe der ungestörten Einteilchen-Energien, wobei die ϵ_i bzw. ω_i die Bag-Eigenmoden der jeweiligen Konstituenten bezeichnen.
- Energieverschiebung durch die direkte Wechselwirkung : Der Beitrag proportional ϵ_I beschreibt die Wechselwirkung der Konstituenten untereinander, durch Austausch virtueller Gluonen und die elementare 4-Gluon Punktwechselwirkung in (5.10c). Die invariante Amplitude ϵ_I wird explizit durch Auswertung der entsprechenden Feynmandiagramme berechnet (Anhang B).
- Energieverschiebung durch Selbstwechselwirkung : Der dritte Term proportional ϵ_S berücksichtigt die Selbstwechselwirkung der Konstituenten mit dem Gluon-Feld. Die Berechnung dieser Diagramme für die im Bag eingesperrte QCD bereitet große Schwierigkeiten : Dazu wäre es notwendig, in den Propagatoren

über *sämtliche* Eigenmoden des virtuellen Gluons bzw. Quarks zu summieren. Diese Summe ist wie in der freien QCD bei kleinen Raumabständen divergent. Zusätzlich kommen für die im Bag eingesperrte QCD aber auch noch Singularitäten ins Spiel, die durch die Randbedingungen verursacht sind. Diese letzteren müssen sorgfältig extrahiert und separat behandelt werden. Aus diesen Gründen ist eine naive Aufsummierung der Propagator-Entwicklung nach Bag-Eigenmoden gefährlich. Insbesondere zeigen verschiedene Rechnungen (Br 82, Chi 82), daß die Größe der Selbstenergiebeiträge sehr empfindlich davon abhängt, über wie viele Eigenmoden die Summation in den Propagatoren erstreckt wird. Andere Ansätze, in denen die verschiedenen divergenten Anteile der Propagatoren analytisch herausgefiltert und gesondert betrachtet werden, erscheinen dagegen vertrauenswürdiger. So finden z.B. (Ba 83) und (Go 83, Go 85) für die Selbstenergie eines masselosen Quarks übereinstimmend einen Wert von $\epsilon_S^{(q)} = 0.9$. Eine umfassende Untersuchung der Selbstenergie-Beiträge erscheint jedoch in weiter Ferne. In Anbetracht der ungeklärten Situation werden wir daher die Selbstwechselwirkungs-Diagramme in (5.10) durch den freien Parameter ϵ_S beschreiben und an experimentelle Daten anpassen.

(iii) Gleitende Kopplungskonstante $\alpha_S(\Lambda R)$:

Die Energieverschiebungen durch die Wechselwirkung der Konstituenten einerseits und die Selbstwechselwirkung andererseits sind in erster Ordnung Störungstheorie proportional zu der starken Kopplungskonstante $\alpha_S = g^2/4\pi$. In den ursprünglichen Anwendungen des Bag Modells (z.B. Ch 74, DeG 75) wurde α_S als konstanter, freier Parameter behandelt.

In der QCD ist jedoch α_S keine Konstante, sondern variiert mit dem Impulsübertrag der wechselwirkenden Teilchen : Für zunehmend große Impulse, d.h. mit kleiner werdenden Relativabständen, nimmt α_S stetig ab, und im Grenzfall sehr großer Impulse verhalten sich die Teilchen nahezu frei (asymptotische Freiheit). Für große Raumabstände hingegen wächst α_S stark an. Diese Variation der Kopplungszustärke α_S wird in der QCD durch einen *Skalenparameter* Λ bestimmt, der die Bereiche geringer und sehr großer Kopplungsstärke charakterisiert. Der Wert von Λ wird durch die Renormierungsbedingungen der QCD festgelegt und liegt je nach Renormierungsprozedur zwischen 50 und 300 MeV (z.B. ist $\Lambda_{MS} \simeq \Lambda_{PV} \simeq 0.47 \cdot \Lambda_{MOM} \simeq 50 - 250 MeV$).

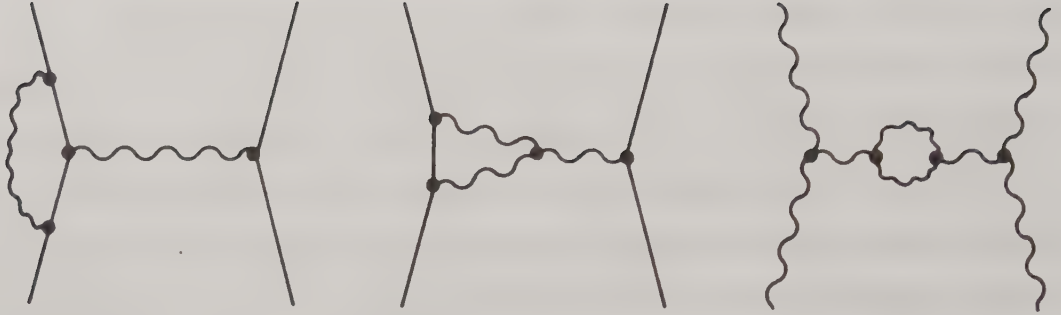
Dasselbe asymptotische Verhalten erwartet man auch für die im Bag eingesperrte QCD, da die kurzreichweitige Wechselwirkung der Teilchen von der Existenz der Bag Randbedingungen unbeeinflusst bleibt. Analog zur freien QCD sollte daher α_S eine Funktion des Relativabstands der Teilchen, d.h. des Bag-Radius R und des Skalenparameters Λ sein :

$$\alpha_S (\Lambda R) \quad \simeq \quad \frac{2\pi}{9} \frac{1}{\ln(1 / \Lambda R)} \quad (5.11)$$

$$R \ll \Lambda^{-1}$$

Um den Wert von Λ festzulegen, müßte man die Loop - Diagramme in Figur 5.4 explizit berechnen und mit experimentellen Daten in Verbindung bringen. Aufgrund der ungeklärten Probleme, die solch eine Berechnung mit sich bringt (vgl. Diskussion im Anschluß an (5.10)), werde ich Λ als freien Parameter behandeln (wobei $\Lambda \simeq \Lambda_{MS}$ sein sollte, d.h. $\Lambda \simeq 100 - 250 MeV$).

Mit anderen Worten : *die Kopplungsstärke α_S wird in dem hier betrachteten Modell gegen Λ als freien Parameter eingetauscht.*



Figur 5.4 :

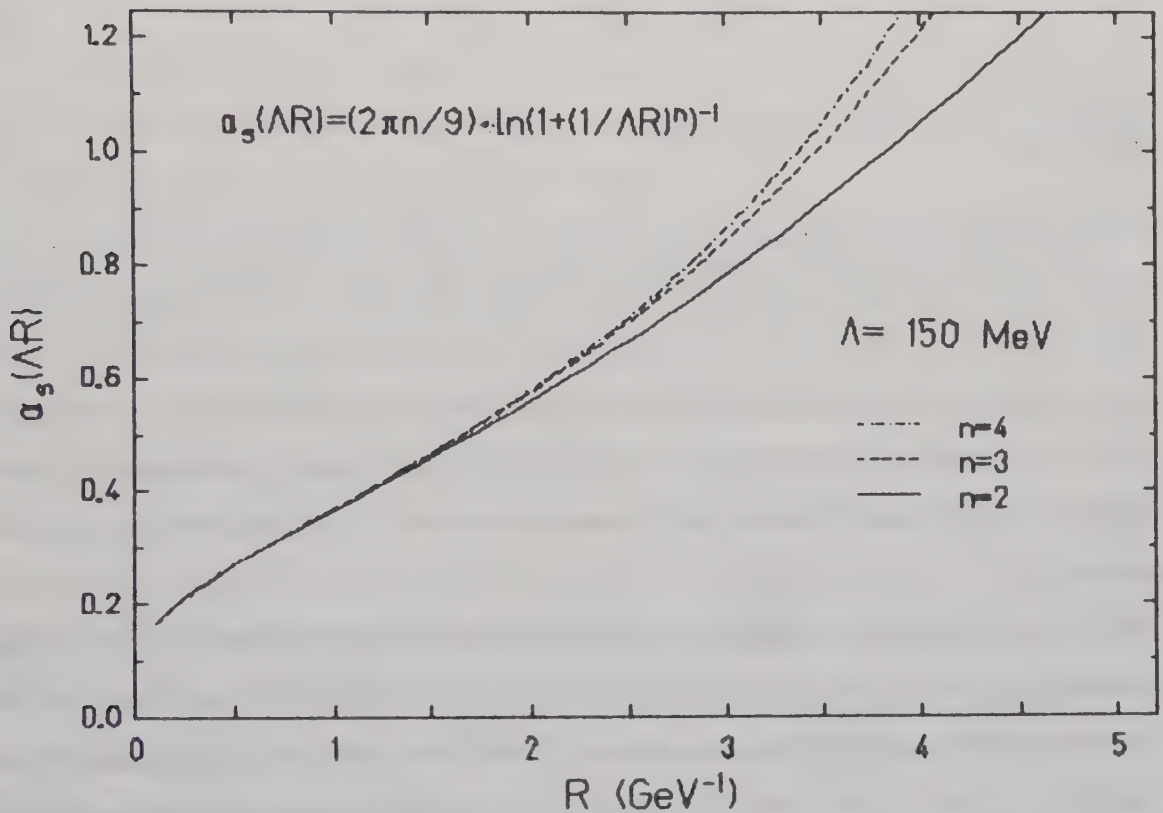
Beispiele für Loopdiagramme $\sim O(\alpha_S^2)$, die den Effekt haben, daß α_S keine Konstante ist sondern eine 'gleitende Kopplungsstärke' $\alpha_S(\Lambda R)$, die vom Impulsübertrag der wechselwirkenden Teilchen abhängt.

Gleichung (5.11) ist nur gültig für $R \ll \Lambda^{-1}$. Für große Werte von R ist die Form von $\alpha_S(\Lambda R)$ nicht genau bekannt. Um das singuläre Verhalten für $R \rightarrow 1/\Lambda$ zu umgehen, verwende ich aus rein rechentechnischen Gründen statt (5.11) die folgende Parametrisierung (Ha 82) :

$$\alpha_S(\Lambda R) = \frac{2\pi n}{9} \frac{1}{\ln \left[1 + \left(\frac{1}{\Lambda R} \right)^n \right]} \quad (5.12)$$

Für $R \ll \Lambda^{-1}$ reproduziert (5.12) den Verlauf von $\alpha_S(\Lambda R)$ nach (5.11), und für $R = \Lambda^{-1}$ ist (5.12) endlich.

Diese spezielle Parametrisierung ist natürlich willkürlich und andere Formen (z.B. Do 80) sind ebenso denkbar. Die physikalischen Observablen wie Energien und Massen sind jedoch relativ insensitiv gegenüber der Wahl der Parametrisierung, wie sich in Kapitel 6 zeigen wird, da sich R im Bereich $R \ll \Lambda^{-1}$ bewegt, wo $\alpha_S(\Lambda R)$ nahezu linear ansteigt (vgl. Figur 5.5).



Figur 5.5 :

Die parametrisierte Form von $\alpha_S(\Lambda R)$ nach (5.12) für verschiedene Werte von n und $\Lambda = 150 \text{ MeV}$. Der physikalisch relevante Bereich von R liegt, wie sich in Kapitel 6 herausstellen wird, bei $2.5 - 3.2 \text{ GeV}^{-1}$. Dort ist $\alpha_S(\Lambda R) / R$ praktisch unabhängig von n .

(iv) Problem der unphysikalischen Schwerpunktbewegung :

In der statischen Approximation des Bag Modells sind die Konstituenten (Quarks bzw. Gluonen) in eine statische Kavität vom Radius R eingesperrt. Man startet von unabhängigen, nicht wechselwirkenden Teilchen mit Impulsen $\vec{p}_i$, die den Randbedingungen (4.23)-(4.25) genügen, welche wiederum das Color-Confinement simulieren. Wegen der unabhängigen Bewegung der Konstituenten im Bag gilt

$$\langle \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \rangle = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (5.13)$$

und daher

$$\langle \vec{P}_{tot}^2 \rangle = \langle \left(\sum_i \vec{p}_i \right)^2 \rangle = \sum_i \langle \vec{p}_i^2 \rangle \neq 0 \quad (5.14)$$

Dies impliziert, daß der Schwerpunkt des Systems nicht in Ruhe ist, sondern oszilliert. Die Energie - Eigenzustände des Bags sind daher *nicht* gleichzeitig auch Eigenzustände zum Gesamtimpuls $\vec{P}_{tot}$. Mit anderen Worten, die *Translationsinvarianz ist verletzt!*

Der Schwerpunkt des Systems wird sozusagen mit den Konstituenten, die der Confinement-Bedingung genügen müssen, in die Kavität eingesperrt. Dieses künstliche 'Confinement des Schwerpunkts' ist eine unvermeidbare Konsequenz der Einteilchen-Natur des Bag Modells (dies gilt im übrigen ganz allgemein für jedes Modell, das von einem System unabhängiger Teilchen startet, z.B. das Schalenmodell in der Kernphysik).

Nun ist jedoch ein Glueball oder Hadron als zusammengesetztes System der Konstituenten ein Color-Singlett, also ein physikalisches Objekt, und sollte daher einen scharfen Schwerpunktimпульs besitzen. Die Schwerpunktbewegung als physikalische

Observable gehört also zum Color-Singlett Charakter des Gesamtsystems und nicht zu den in die Kavität eingesperrten, Farbladung tragenden, Konstituenten selbst. Die künstliche, unphysikalische Oszillation des Bags (5.14) führt zu einer zusätzlichen Energie, die subtrahiert werden muß, um die *physikalischen Energien* zu erhalten, nämlich

$$E^2 \rightarrow E^P{}^2 = E^2 - \langle \vec{P}_{tot}^2 \rangle \quad (5.15)$$

Das heißt, aus dem Spektrum des Bag Hamiltonoperators $\hat{H}_{Bag}$ müssen die physikalisch relevanten Eigenzustände mit entsprechenden Energie-Eigenwerten zu scharfem Schwerpunktimпульs $\vec{P}_{tot}$ herausprojiziert werden.

Die naheliegende Methode zur Konstruktion von Eigenzuständen mit scharfem Schwerpunktimпульs wäre die aus der Kernphysik bekannte 'Peierls-Yoccoz' Methode. Auf das Bag Modell übertragen hieße das, man müßte die physikalisch relevanten Bag-Zustände als Wellenpakete mit wohldefiniertem Schwerpunktimпульs durch eine geeignete Überlagerung der Konstituenten-Wellenfunktionen konstruieren.

Allerdings, der entscheidende Unterschied zwischen dem Schalenmodell der Kernphysik und dem Bag Modell ist, daß im ersteren Fall die Hartree-Fock Wellenfunktionen *alle* Freiheitsgrade des Systems enthalten, wohingegen die Quark- und Gluon-Wellenfunktionen im Bag Modell nur die inneren Freiheitsgrade (d.h. die der Konstituenten innerhalb des Bags) beinhalten, *nicht* aber den Einfluß des äußeren, echten Vakuums (repräsentiert durch den Vakuumdruck B) berücksichtigen.

Eine alternative Methode, die dem Bag Modell angemessen ist und sowohl die äußeren wie auch die internen Freiheitsgrade in Betracht zieht, wurde von Szymacha (Sz 84) sowie Liu und Wong (Li 82) entwickelt. Dabei wird angenommen, daß der Bag einen gebundenen physikalischen Zustand darstellt, der durch das Gleichgewicht

zwischen äußerem Vakuumdruck B und dem entgegengesetzten Druck der Konstituenten im Innern erzeugt wird. Die physikalischen Energie-Eigenwerte und Eigenzustände zu scharfem Schwerpunktimпульs werden nach diesem Ansatz aus der Forderung bestimmt, daß die Energiespektren des Bags einerseits und die des physikalischen Objekts (Hadron, Glueball etc.) andererseits übereinstimmen müssen. Unter der Annahme, daß der Gesamtimpuls $\vec{P}_{tot}$ auch bei Vorhandensein der Wechselwirkung im wesentlichen von der Konstituenten herrührt, gilt für die statischen Energie-Eigenzustände des Bags $|E\rangle$,

$$\langle \vec{P}_{tot}^2(R) \rangle \simeq \langle E | \sum_i (\vec{p}_i^2) | E \rangle = \sum_i \left[\frac{x_\alpha^{(i)}}{R} \right]^2 \quad (5.16)$$

wobei sich die Summe über die Konstituenten der Sorte i erstreckt und $x_\alpha^{(i)} \equiv (\varepsilon_\alpha^{(i)}, \omega_\alpha^{(i)})$ die Eigenmoden für Quarks bzw. Gluonen vom Typ i mit Quantenzahlkombination α bezeichnen.

Die *Energie-Eigenwerte und Eigenzustände zu scharfem Schwerpunktimпульs* ergeben sich dann nach (5.9), (5.15) und (5.16) aus der Diagonalisierung der Matrix

$$\langle \alpha | \hat{H}_{QCD} - E_{QCD}^P | \beta \rangle = \langle \alpha | \hat{H}_{QCD} - (E_{QCD}^2 - \langle \vec{P}_{tot}^2 \rangle)^{1/2} | \beta \rangle \quad (5.17)$$

5.2.2 Energiebeiträge E_{VAC} der Vakuumfluktuationen

(i) Volumenenergie E_{VOL} :

Das Bag Modell basiert nach Abschnitt 5.1 auf der Vorstellung zweier unterschiedlicher Phasen des Vakuums :

Innerhalb des Bags existiert ein *störungstheoretisches Vakuum*, während im Außenbereich das *physikalische Vakuum* vorliegt, das eine geringere Energiedichte als das störungstheoretische Vakuum besitzt. Die Differenz der Energiedichten der beiden Vakua bedingt einen Vakuumdruck B von außen auf den Bag (genauer gesagt, einen negativen inneren Druck), der den wünschenswerten Effekt hat, daß die farbgeladenen Teilchen im Innern lokalisiert bleiben (vgl. Figur 5.1).

Dies führt zu einer Volumenenergie als Folge der unterschiedlichen Energiedichten innerhalb und außerhalb des Bags. Für die statische Kavität folgt aus Gl.(5.5)

$$E_{VOL} = \frac{4\pi}{3} R^3 B \quad (5.18)$$

(ii) Casimir-Energie E_{CAS} :

Weiterhin gibt es einen Energiebeitrag des inneren, störungstheoretischen Vakuums. In der Quantenfeldtheorie sind stets Nullpunktschwingungen der Felder vorhanden. So auch in der QCD, in der der Vakuumserwartungswert des farbelektromagnetischen Feldes nicht verschwindet, bedingt durch die stets präsenten Vakuumfluktuationen. Im Fall der freien, räumlich unbeschränkten Theorie sind diese 'Nullpunktoszillationen' irrelevant für physikalische Observable. Die unendliche Nullpunktenergie des Hamiltonoperators wird i.a. durch Normalordnung der Operatoren heraussubtrahiert, da nur Energie-Differenzen physikalisch bedeutsam und meßbar sind.

Im Bag Modell jedoch hängen die Energien von der Ausdehnung des Bags, d.h. vom Bag Radius R ab. Die Energien des Anregungsspektrums sind als Folge der Bedingung (5.4) jeweils mit einem bestimmten Bag Radius verknüpft, d.h. verschiedene Energien bedingen verschiedene Bag-Größen. Die Nullpunktenergien zweier verschiedener Konfigurationen sind daher nicht gleich und ihre Differenz ist im Prinzip eine observable Größe - die sogenannte Casimir-Energie.

Die Casimir-Energie für das farbelektromagnetische Feld der QCD innerhalb einer statischen Kavität ist in führender Ordnung einer asymptotischen Entwicklung gegeben durch (Mi 83, Baa 83) :

$$E_{CAS} = \frac{1}{R} \cdot (9 \cdot C_q + 8 \cdot C_g) \equiv \frac{C_0}{R}$$

$$C_q = -\frac{1}{144\pi}$$

$$C_g = +\frac{11}{72\pi}$$
(5.19)

Dabei ist C_q der Beitrag eines masselosen Quarks und C_g entsprechend der eines Gluons. Die Berücksichtigung von 9 Sorten von Quarks (3 Flavours x 3 Colors) und 8 Typen von Gluonen (8 Colors) ergibt dann die obige Formel.

(iii) Vakuumenergie E_{VAC} :

Wir fassen die beiden Energiebeiträge der Vakuumstruktur (5.18) und (5.19) als E_{VAC} zusammen :

$$E_{VAC} (R) = \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{C_0}{R}$$
(5.20)

5.2.3 Gesamtenergie des Bags - Massenformel

Zur Übersichtlichkeit stellen wir nun die relevanten Formeln aus den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 zusammen. Diese Formelsammlung ist das mathematische Filtrat unseres Modells, welches Mesonen, Baryonen und Glueballs auf vereinheitlichte Weise beschreibt.

1. Die Gesamtenergie des Bags $E_{BAG}(R)$ als Funktion des Parameters R , $E_{Bag}(R)$, setzt sich zusammen aus den Beiträgen der Vakuumenergien $E_{VAC}(R)$, sowie der Energie $E_{QCD}^P(R)$ des jeweils betrachteten Systems wechselwirkender Konstituenten, (5.6a)-(5.6c), unter Berücksichtigung der Schwerpunktkorrekturen und der Konfigurationsmischungen nach (5.17):

$$E_{BAG}(R) = E_{VAC}(R) + E_{QCD}^P(R) \quad (5.21)$$

Dabei ist

$$E_{VAC}(R) = E_{VOL}(R) + E_{CAS}(R) \quad (5.22)$$

$$E_{VOL} = \frac{4\pi}{3} R^3 B \quad (5.23)$$

$$E_{CAS} = \frac{C_0}{R} ; \quad (C_0 \simeq 0.37) \quad (5.24)$$

und

$$E_{QCD}^P(R) = \left[(E_0 + \Delta E)^2 - \sum_i \left(\frac{x^{(i)}}{R} \right)^2 \right]_{DIAGONALISIERT}^{1/2} \quad (5.25)$$

$$E_0 = \sum_i \left(\frac{x^{(i)}}{R} \right) \quad (5.26)$$

$$\Delta E = \frac{\alpha_S(\Lambda R)}{R} \cdot \left[\sum_{i \neq j} \epsilon_I^{(ij)} + \sum_i \epsilon_S^{(i)} \right] \quad (5.27)$$

mit

$$x^{(i)} = \begin{cases} \epsilon^{(i)} = [\vec{p}^{(i)2} + m^{(i)2}]^{1/2} & \text{für Quarks} \\ \omega^{(i)} & \text{für Gluonen} \end{cases} \quad (5.28)$$

$$\alpha_S(\Lambda R) = \frac{2\pi n}{9} \cdot \frac{1}{\ln [1 + 1/(\Lambda R)^n]} \quad (5.29)$$

Hierbei spezifizieren die Indizes i und j die Art der Konstituenten, d.h. entweder Quarks mit Flavour u, d, s oder Gluonen mit Polarisation TE, TM , jeweils in einem bestimmten Quantenzustand, der durch die Quantenzahlkombination (4.29) bzw. (4.33) charakterisiert ist. Mit dieser Notation bezeichnet $\epsilon_I^{(ij)}$ die Wechselwirkungsenergie zweier Konstituenten vom Typ i und j , und $\epsilon_S^{(i)}$ die Selbstenergie eines Konstituenten der Sorte i . Die $x^{(i)} = \epsilon^{(i)}$ bzw. $\omega^{(i)}$ schließlich sind die Bag - Eigenmoden eines Quarks bzw. Gluons vom Typ i .

2. Die Masse des Bags M_{BAG} ergibt sich schließlich aus der quadratischen Randbedingung (5.4), welche verlangt, daß sich der äußere Vakuumdruck B mit dem inneren, kinetischen Druck der Konstituenten stets im Gleichgewicht befindet, so daß der Bag als Ganzes stabil ist. Diese Stabilitätsbedingung ist nach (5.5) äquivalent zur *Minimierung der Energie* $E_{BAG}(R)$ bzgl. R ,

$$\frac{d}{dR} E_{BAG}(R) = 0 \quad (5.30)$$

wodurch der Gleichgewichtsradius R_{BAG} bestimmt wird.

Die *physikalische Masse des Bags* ist dann :

$$M_{BAG} = E_{BAG}(R_{BAG}) = \text{Min} [E_{BAG}(R)] \quad (5.31)$$

3. Die freien Parameter des Modells sind:

- die Bagkonstante B
- der Skalenparameter Λ
- die effektiven Selbstenergie Parameter $\epsilon_s^{(q)}$ für Quarks und $\epsilon_s^{(g)}$ für Gluonen
- die 'strange'-Quarkmasse $m^{(s)}$

Wir berücksichtigen nur die drei leichten Quarks u, d, s mit $m^{(u)} = m^{(d)} = 0$. Ferner setzen wir $\epsilon_S^{(u)} = \epsilon_S^{(d)} = \epsilon_S^{(s)} \equiv \epsilon_S^{(q)}$ und nehmen dabei an, daß mögliche Differenzen zwischen den Selbstenergien $\epsilon_S^{(u/d)}$ und $\epsilon_S^{(s)}$ effektiv in der s - Quarkmasse $m^{(s)}$ berücksichtigt werden können.

Die Konstante n in der Parametrisierung der gleitenden Kopplungskonstante $\alpha_S(\Lambda R)$ nach Gl.(5.29), wird *nicht* als freier Parameter behandelt, sondern willkürlich auf $n = 2$ festgelegt. Dies ist natürlich nur gerechtfertigt, falls die Anpassung der Parameter $B, \Lambda, \epsilon_S^{(q)}, \epsilon_S^{(g)}$ und $m^{(s)}$ gegenüber einer Variation von n stabil ist. Daß eine solche Stabilität für $n \geq 2$ gewährleistet ist, werden wir im Zusammenhang mit der Diskussion der Massenspektren im folgenden Kapitel zeigen.

6 Hadronen und Glueballs

Im Folgenden widmen wir uns der konkreten Anwendung des in Kapitel 5 vorgestellten Modells zur vereinheitlichten Beschreibung von Hadronen und Glueballs.

In Abschnitt 6.1 untersuchen wir zunächst das Massenspektrum sowie verschiedene Eigenschaften der leichten Hadronen, wobei wir experimentelle Informationen aus der Hadron-Spektroskopie verwenden, um die freien Parameter unseres Modells festzulegen. Wir erhalten physikalisch plausible Werte für die Parameter und finden (mit Ausnahme der Massen von Pion und Kaon) eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Hadron Massen mit dem experimentellen Spektrum. Des weiteren berechnen wir für die Baryonen deren magnetischen Momente und Ladungsradien, sowie die 'Axial-Vektor Kopplung' von Proton und Neutron. Die quantitativen Ergebnisse und deren phänomenologische Konsequenzen werden ausführlich diskutiert, wobei die Vorzüge und die Schwachstellen des Modells aufgezeigt werden.

In Abschnitt 6.2 führen wir dann eine detaillierte Analyse der Glueballs durch, indem wir das in 6.1 getestete Konzept auf den Glueball Sektor übertragen. Dabei idealisieren wir Glueballs zunächst als reine gluonische Zustände, d.h. wir vernachlässigen hier mögliche Quark-Beimischungen ¹. Im Sinne einer einheitlichen Beschreibung von Glueballs und Hadronen verwenden wir hier diesselben (!) Parameter-Werte wie zuvor bei den Hadronen.

¹Die Auswirkungen von Mischungen zwischen Glueballs und Quark-Zuständen werden in Kapitel 7 behandelt.

Im Rahmen dieses Konzepts treffen wir konkrete Vorhersagen für das Massenspektrum der niedrig liegenden Glueballs. Die Ergebnisse werden in Gegenüberstellung mit dem gegenwärtigen experimentellen Kenntnisstand der Spektroskopie von potentiellen Glueball Kandidaten diskutiert. Außerdem analysieren wir ausführlich die Gluon-Gluon Wechselwirkung im Vergleich zur Wechselwirkung zwischen Quarks, mit dem Ziel, die signifikanten Unterschiede von Hadronen und Glueballs sowohl anschaulich als auch quantitativ zu verstehen.

6.1 Mesonen und Baryonen

Im Rahmen unseres Modells studieren wir zunächst das Spektrum der pseudoskalaren Mesonen ($J^{PC} = 0^{-+}$), der Vektor-Mesonen ($J^{PC} = 1^{--}$), der Baryonen ($J^P = \frac{1}{2}^{+}$) und der Baryon-Resonanzen ($J^P = \frac{3}{2}^{+}$). Das Massenspektrum dieser niederenergetischen Hadronen ist experimentell sehr gut gemessen. Insofern dient die Berechnung der Hadron Massen einerseits dazu, die vier Parameter des Modells, die Bagkonstante B , den Skalenparameter Λ , die Quark-Selbstenergie $\epsilon_s^{(q)}$ und die Masse $m^{(s)}$ der 'strange' Quarks durch Anpassung an das experimentelle Hadronspektrum festzulegen und andererseits als wichtiger Test für die Glaubwürdigkeit und den quantitativen Aussagegehalt unseres Modells.

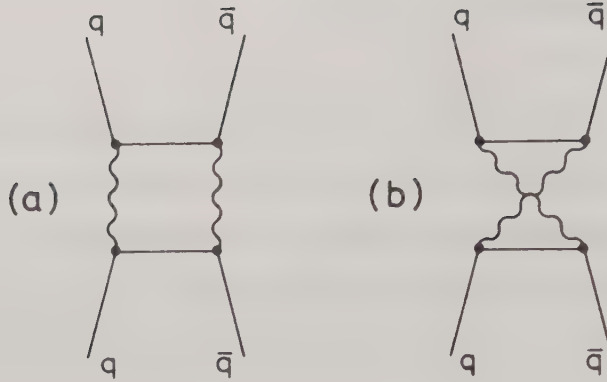
6.1.1 Berechnung der Hadron Massen

Wir konstruieren zunächst die Hadron-Wellenfunktionen entsprechend ihrem Quark-Gehalt gemäß den Gleichungen (5.7), (5.8) und zwar derart, daß sie den 'Physikalitäts-Forderungen' (4.45)-(4.47) genügen, wie in Abschnitt 5.2.1 erläutert wurde. Die explizite Konstruktion von solchen eichinvarianten, normierten Color-Singlett Zuständen mit wohldefinierten Quantenzahlen J^{PC} bzw. J^P ist in Anhang C ausgeführt.

Entsprechend dem in Kapitel 5 vorgestellten Konzept berechnen wir anschließend anhand der Formeln (5.21) - (5.31) die jeweiligen Massen und fixieren die Parameter B , Λ , $\epsilon_S^{(q)}$ und $m^{(s)}$ durch Anpassung an die experimentellen Werte für ρ -Meson, Proton P , Delta-Resonanz Δ und das Ω^- -Teilchen.

Mit den damit festgelegten Parametern bestimmen wir die Massen der verbleibenden Mesonen, Baryonen und Baryon-Resonanzen - mit Ausnahme von η und η' .

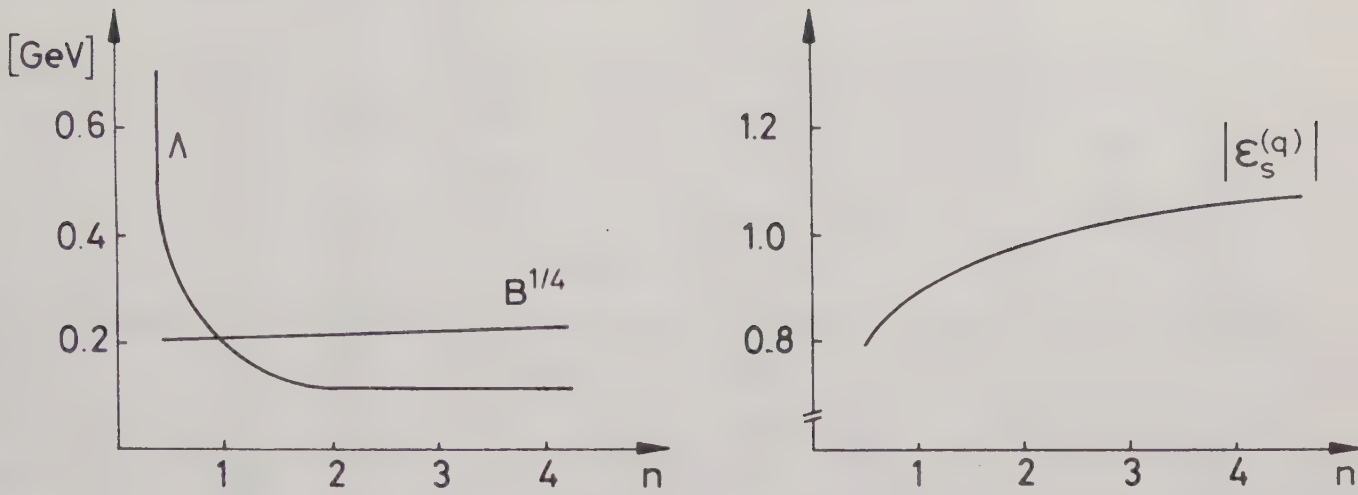
Die pseudoskalaren Mesonen η und η' erfordern eine gesonderte Behandlung : Die naive Betrachtung würde ergeben, daß das η -Teilchen und das Pion π entartet sind, analog zur Entartung der Vektor-Mesonen ω und ρ . Dies ist jedoch nicht der Fall. Die experimentellen Massen von η ($m_\eta = 549 \text{ MeV}$) und η' ($m_{\eta'} = 958 \text{ MeV}$) liegen weit über der Pion-Masse $m_\pi = 140 \text{ MeV}$. Dieses Phänomen ist als *U(1)-Problem* bekannt. Seine Lösung liegt vermutlich zum Teil in einer durch nichtstörungstheoretische Effekte verursachten Anomalie (tHo 76) und zum Teil in den $q\bar{q}$ -Vernichtungsdiagrammen (Figur 6.1), die nur für Flavour-, Color- und Spin-Singletts existieren und deren Amplituden ungewöhnlich groß sind (Do 83). Das letztere Argument wird in Kapitel 7 im Zusammenhang mit $q\bar{q}$ -Glueball Mischungen diskutiert.



Figur 6.1 :

Quark-Antiquark Wechselwirkung durch $q\bar{q}$ -Vernichtung in zwei Gluonen und anschließende Erzeugung eines $q\bar{q}$ -Paares. Die Nicht-Existenz eines niedrig liegenden Iso-singlett 0^{-+} -Mesons liegt möglicherweise zum Teil in derartigen Kopplungen mit einem 2-Gluon Zustand (Glueball) begründet.

Die Anpassung der Parameter B , Λ , $\epsilon_S^{(q)}$ und $m^{(s)}$ ist nahezu unabhängig von der Konstanten n , die in die funktionale Form von $\alpha_S(\Lambda R)$, Gl.(5.29) eingeht (vgl. Abschnitte 5.2.1(iii) und 5.2.3). Wie aus Figur 6.2 ersichtlich, ist der Parameter-Fit für $n \geq 2$ gegenüber einer Variation von n ziemlich stabil. Dieses befriedigende Ergebnis ist in Übereinstimmung mit (Ca 83) und rechtfertigt die willkürliche Festlegung von n . Somit ist n in unserem Modell kein freier Parameter.



Figur 6.2 :

Abhängigkeit der Parameter $B^{1/4}$, Λ und $\epsilon_s^{(q)}$ von der Konstanten n , die in die Darstellung von α_s nach Gl.(5.29) eingeht.

6.1.2 Resultate für das Hadron Massenspektrum

Unsere numerischen Resultate für das Massenspektrum der Hadronen sind in der folgenden Tabelle 6.1 und Figur 6.3 zusammengefaßt.

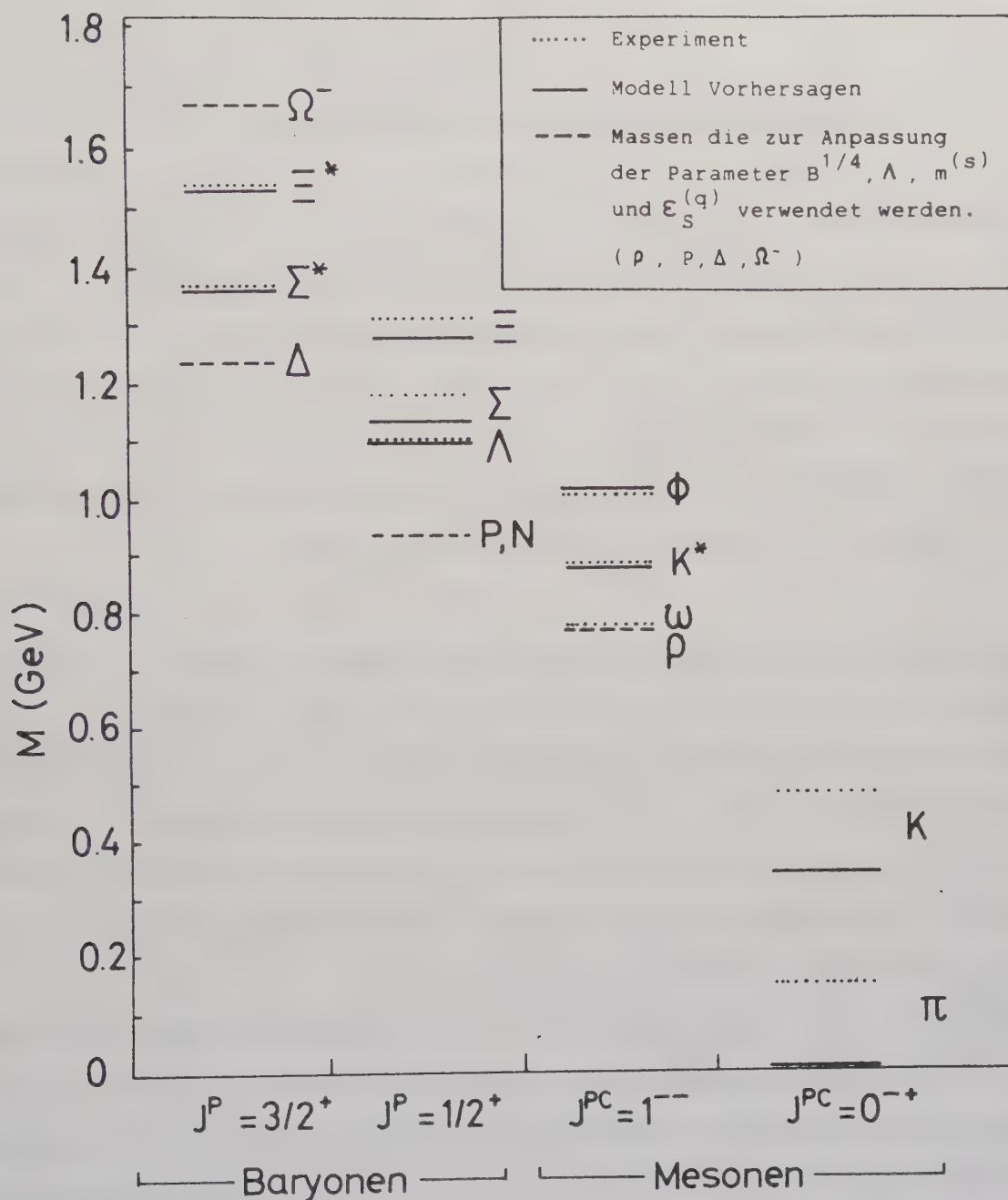
Teilchen	$J^{PC} (J^P)$	$M_{EXP} (GeV)$	$M_{BAG} (GeV)$	$R_o (GeV^{-1})$	$\alpha_S(R_o)$
π	0^{-+}	0.139	$\simeq 0$	2.32	0.67
K	0^{-+}	0.495	0.324	2.48	0.73
ρ	1^{--}	<u>0.770</u>	0.770	2.64	0.77
ω	1^{--}	0.783	0.770	2.64	0.77
K^*	1^{--}	0.892	0.887	2.72	0.79
ϕ	1^{--}	1.019	1.021	2.80	0.81
P	$\frac{1}{2}^{+}$	<u>0.938</u>	0.938	3.12	0.90
Λ	$\frac{1}{2}^{+}$	1.116	1.111	3.20	0.93
Σ^+	$\frac{1}{2}^{+}$	1.189	1.137	3.20	0.93
Ξ^0	$\frac{1}{2}^{+}$	1.321	1.289	3.28	0.95
Δ	$\frac{3}{2}^{+}$	<u>1.236</u>	1.236	3.20	0.93
Σ^*	$\frac{3}{2}^{+}$	1.385	1.384	3.28	0.95
Ξ^*	$\frac{3}{2}^{+}$	1.533	1.528	3.28	0.95
Ω^-	$\frac{3}{2}^{+}$	<u>1.672</u>	1.672	3.36	0.98

Parameterwerte:		
Bag-Konstante	$B^{\frac{1}{4}}$	= 240 MeV
Skalenparameter	Λ	= 167 MeV
s - Quark Masse	$m^{(s)}$	= 268 MeV
Quark-Selbstenergie	$\epsilon_S^{(q)}$	= -1.06 ($q = u, d, s$)

Tabelle 6.1 :

Meson und Baryon Massen sowie zugehörige Bag Radien $^2 R_o$ und effektive Kopplungsstärken $\alpha_S(R_o)$ für $m^{(u)} = m^{(d)} = 0$ und $n = 2$ in der Parametrisierung von $\alpha_S(\Lambda R)$ nach Gl.(5.29). Die unterstrichenen Massen wurden zur Anpassung der Parameter $B^{1/4}$, Λ , $\epsilon_S^{(q)}$ und $m^{(s)}$ verwendet. Die Pion-Masse ist als $\simeq 0$ angegeben; siehe dazu folgende Erläuterung unter Punkt (i).

$^21 GeV^{-1} \simeq 0.2 fm$



Figur 6.3:

Massenspektrum der Mesonen und Baryonen für $m^{(u)} = m^{(d)} = 0$, und den Parameterwerten aus Tabelle 6.1 sowie $n = 2$. Die Massen von ρ, P, Δ und Ω^- wurden zur Anpassung der Parameter verwendet (- - -). Alle anderen Massen sind Modell-Vorhersagen (—). Die experimentellen Werte sind punktiert dargestellt (···).

6.1.3 Vergleich mit anderen Bag Modell Rechnungen

Unser Parameter-Fit unterscheidet sich deutlich von früheren Bag Modell Rechnungen (DeG 75, Cho 74, Do 75). Insbesondere erhalten wir ein größeres $B^{1/4}$ und konsequenterweise kleinere Bag Radien R_0 und kleinere Werte für α_S (vgl. untenstehende Diskussion (i) - (iv)). Die Ursache dafür liegt natürlich in der Unterschiedlichkeit der Modell-Ansätze begründet. Tabelle 6.2 vergleicht die Resultate der MIT-Gruppe (DeG 75) mit den Ergebnissen unseres Modells und verdeutlicht die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten der beiden Ansätze.

Eine besonderen Erwähnung verdienen an dieser Stelle die Arbeiten von Carlson, Hansson und Peterson (Ca 83, Ha 82). Die Autoren haben basierend auf dem ursprünglichen MIT Bag Modell ein phänomenologisches Modell für das QCD-Vakuum entwickelt. Die Grundidee dabei ist, das störungstheoretische Vakuum als ein Kondensat von Glueballs anzusehen, welches die Energiedichte und den Vakuumdruck B bestimmt. In der Anwendung ihres Modells auf die Hadron-Spektroskopie finden die genannten Autoren ganz ähnliche Ergebnisse wie wir.

Obwohl wir einige Elemente aus diesem Modell übernommen haben, unterscheidet sich unser Ansatz wesentlich dadurch, daß wir den Bagdruck B direkt bestimmen (d.h. durch Anpassung an das experimentelle Spektrum festlegen) und außerdem Konfigurationsmischungen in Betracht ziehen. Insofern ist es befriedigend festzustellen, daß trotz dieser signifikanten Unterschiede beide Modelle zu quantitativ ähnlichen Resultaten führen.

	MIT - Modell	Dieses Modell
Parameter	$B^{\frac{1}{4}} = 145 \text{ MeV}$ $Z_o = -1.84$ $\alpha_S = 2.2$ $m^{(s)} = 279 \text{ MeV}$	$B^{\frac{1}{4}} = 240 \text{ MeV}$ $\epsilon_S^{(q)} = -1.06$ $\Lambda = 167 \text{ MeV}$ $m^{(s)} = 268 \text{ MeV}$
Kopplung α_S	2.2 (konstant)	0.67 – 0.98
Bag-Radien R_o	3.3 – 5.4 GeV^{-1}	2.6 – 3.4 GeV^{-1}
Massenformel	$M = E_{VAC} + E_{BAG}$ $E_{VAC} = \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{Z_o}{R}$ $E_{BAG} = E_o + \frac{\alpha_S}{R} \cdot \sum_{ij} \epsilon_I^{(ij)}$	$M = E_{VAC}$ $+ [E_{BAG}^2 - \langle P^2 \rangle]_{DIAG.}^{1/2}$ $E_{VAC} = \frac{4\pi}{3} R^3 B + \frac{C_{GAS}}{R}$ $E_{BAG} = E_o + \frac{\alpha_S(\Lambda R)}{R} \cdot \sum_{ij} \epsilon_I^{(ij)}$ $+ \frac{\alpha_S(\Lambda R)}{R} \cdot \sum_i \epsilon_S^{(i)}$

Tabelle 6.2 :

Vergleich zwischen dem Modell der MIT-Gruppe nach (DeG 75) und unserem Modell (Tabelle 6.1). Man beachte insbesondere die deutlich verschiedenen Werte für $B^{1/4}$, α_S und R_o .

6.1.4 Diskussion der Ergebnisse und phänomenologische Konsequenzen

Wie aus Tabelle 6.1 ersichtlich, ist die Übereinstimmung unserer berechneten Hadron Massen mit den experimentellen Werten mit Ausnahme der Massen von Pion und Kaon ausgezeichnet. Folgende Punkte verdienen eine nähere Diskussion.

(i) Die Massen von Pion und Kaon :

Die Pion- und die Kaon-Masse liegen in unserem Modell zu niedrig. Das signalisiert eine Überbewertung der Korrektur zur Schwerpunktsbewegung nach Gl.(5.15)-(5.17) für diese beiden Teilchen. Das hängt wiederum damit zusammen, daß die Wechselwirkungsenergie der Quarks gegenüber den Ruhemassen von Pion und Kaon relativ groß ist. Die Annahme, daß der Gesamtimpuls des Bags in erster Linie von den Valenzquarks herrührt (vgl. Kapitel 5, Abschnitt 5.2.2 (iv)) ist in diesem Fall aufgrund der relativistischen Natur von Pion und Kaon nicht besonders gut. Der Fehler ist allerdings nur gering. Dies wird offensichtlich, wenn man in den Gleichungen (5.15)-(5.17) statt $E^{P^2} = E^2 - < \vec{P}_{tot}^2 >$ die Ersetzung

$$E^{P^2} = E^2 - \eta \cdot < \vec{P}_{tot}^2 > \quad (6.1)$$

mit $\eta \lesssim 1$ macht. Für $\eta = 0.93$ ergibt sich dann die physikalische Pion Masse $m_\pi = 140 \text{ MeV}$ und die Kaon Masse erhöht sich auf $m_K = 487 \text{ MeV}$.

(ii) Die Bag Radien R_o :

Wie aus Tabelle 6.1 ersichtlich, liegen die Werte für die Radien im Bereich von $2.6 - 3.2 \text{ GeV}^{-1}$ ($\simeq 0.5 - 0.7 \text{ fm}$) und sind wesentlich kleiner als in früheren Bag Modell Rechnungen, in denen typischerweise $R_o \simeq 3.3 - 5.5 \text{ GeV}^{-1}$ ($\simeq 0.7 - 1 \text{ fm}$) ist (vgl. Tabelle 6.2). Der Grund hierfür liegt in erster Linie darin, daß wir die Masse des Bags durch Minimierung von $(E^2 - \langle \vec{P}_{tot}^2 \rangle)^{1/2}$ anstatt von E berechnen. Dies bedingt zu gegebener Masse ein größeres E und folglich kleinere Bag Radien R_o .

Da die Bag Radien eine zentrale Rolle für die Phänomenologie der Hadronen spielen, haben derartig kleinen Werte für R_o wichtige physikalische Konsequenzen. Dies gilt insbesondere für observable Größen, die direkt mit den Bag Radien zusammenhängen, wie die magnetischen Momente, die elektromagnetischen Ladungsradien und die Axial-Vektor Kopplungskonstante von Proton und Neutron (siehe folgender Punkt (iii)).

In diesem Zusammenhang stellt sich allerdings die Frage, inwieweit die Bag Radien R_o mit den physikalischen Radien der Hadronen zu identifizieren sind. Da der Bag in der statischen Approximation einen scharfen Rand besitzt - im Widerspruch zur Unschärferelation - ist eine solche Identifikation bestenfalls näherungsweise (im zeitlichen Mittel) gerechtfertigt (Ch 74). Tatsächlich können die Quantenfluktuationen der Operatoren einen signifikanten Einfluß auf die Erwartungswerte haben. So hat z.B. eine Ausschmierung des Bag Rands wie im 'Soliton Bag Modell' (Fr 77) empfindliche Konsequenzen für das Verhalten der Quark-Wellenfunktionen in der Nähe der Bag Oberfläche, worauf einerseits die Erwartungswerte für die magnetischen Momente und die Ladungsradien ziemlich sensitiv reagieren, andererseits aber dadurch die Struktur des Massenspektrums nicht wesentlich beeinflußt wird.

Folglich ist Vorsicht geboten, die scharfen Bag Radien rigoros als die tatsächlichen physikalischen Radien zu interpretieren. Vielmehr erscheint es sinnvoll, den Radius

des Bags mit dem 'Confinement Radius' zu identifizieren, denn die Bag-Größe bestimmt sich aus den Randbedingungen an die Quark- und Gluon-Felder innerhalb des Bags, die ja das Farb-Confinement simulieren. In diesem Zusammenhang ist es interessant festzustellen, daß Monte Carlo Simulationen der Farbwechselwirkung auf einem Raum-Zeit Gitter 'Confinement Radien' von $\simeq 0.6 - 0.7 \text{ fm}$ ergeben, was den Werten der Bag Radien in unserem Modell, $R_0 \simeq 3 \text{ GeV}^{-1}$, entspricht.

Auf der anderen Seite beruhen wesentliche Erfolge des MIT Bag Modells (mit Bag Radien $R_0 \simeq 5 \text{ GeV}^{-1}$) gerade auf dieser Identifikation, so z.B. die nahezu korrekte Vorhersage des Proton Radius und der Axial-Vektor Kopplungskonstante für die Nukleonen (DeG 75). Jedoch mehren sich die Argumente dafür, daß die Bag Radien R_0 deutlich kleiner als 5 GeV^{-1} sein sollten (Fl 83, Br 79, Fi 79). Vergleiche mit experimentellen Daten aus hochenergetischen, elastischen Proton-Proton Streuungen und dem Drell-Yan Prozeß favorisieren Radien im Bereich von 0.7 fm , was konsistent mit unseren Werten $R_0 \simeq 3 \text{ GeV}^{-1}$ ist.

(iii) Magnetische Momente, Ladungsradien und Axial-Vektor Kopplung :

Um zu testen, inwieweit unsere Ergebnisse für die Bag Radien mit experimentellen Daten verträglich sind, haben wir die magnetischen Momente und elektromagnetischen Ladungsradien der Baryonen sowie die Axial-Vektor Kopplung Proton und Neutron mit den Radien R_0 aus Tabelle 6.1 berechnet.

Dabei ist zu betonen, daß ebenso wie für die Massen auch für diese drei statischen Größen eine Korrektur der spuriosen Schwerpunktoszillation (vgl. Kapitel 5, Abschnitt 5.2.2 (iv)) in Betracht gezogen werden muß. Die Berechnung dieser Korrekturen haben wir in Anlehnung an (Ba 84) durchgeführt. Die relevanten Formeln sind in Tabelle 6.3 angegeben.

Magnetisches Moment :

$$\vec{\mu}^{stat} = \langle B | \frac{1}{2} \int_{BAG} d^3r \left[\vec{r} \times \left(\sum_i \hat{q}_i^+(\vec{r}) \vec{\alpha}_i Q_i \hat{q}_i(\vec{r}) \right) \right] | B \rangle$$

$$\vec{\mu}^{corr} \simeq \vec{\mu}^{stat} \cdot \left(1 + \frac{\langle \vec{P}^2 \rangle}{2 M^2} \right) + \frac{\langle \vec{P}^2 \rangle}{6 M^2} \sum_i Q_i$$

Elektromagnetischer Ladungsradius :

$$\langle r^2 \rangle^{stat} = \langle B | \int_{BAG} d^3r \left[\sum_i \hat{q}_i^+(\vec{r}) r^2 Q_i \hat{q}_i(\vec{r}) \right] | B \rangle$$

$$\langle r^2 \rangle^{corr} \simeq \left(\langle r^2 \rangle^{stat} - \frac{9}{4 \langle \vec{P}^2 \rangle} \sum_i Q_i \right) \cdot \left(1 + \frac{\langle \vec{P}^2 \rangle}{3 M^2} \right)$$

Axial-Vektor Kopplung :

$$g_A^{stat} = \langle P | \int_{BAG} d^3r \left[\sum_i \hat{q}_i^+(\vec{r}) \vec{\sigma}_i \hat{q}_i(\vec{r}) \right] | N \rangle$$

$$g_A^{corr} \simeq g_A^{stat} \cdot \left(1 + \frac{\langle \vec{P}^2 \rangle}{3 M^2} \right)$$

Tabelle 6.3 :

Formeln zur Berechnung der magnetischen Momente μ , Ladungsradien $\langle r^2 \rangle$ und Axial-Vektor Kopplungskonstante für die Nukleonen. Das Superskript *stat* steht für die statische Berechnung der Größen, das Superskript *corr* für die korrigierten Werte unter Berücksichtigung der Schwerpunktbewegung des Bags. $|B\rangle$, $|P\rangle$, $|N\rangle$ bezeichnen die statischen Bagzustände der Baryonen, des Protons bzw. Neutrons entsprechend ihrem Quarkgehalt. Q_i ist die elektrische Ladung des Quarks i , $\langle \vec{P}^2 \rangle$ der mittlere Schwerpunktimпульs des Bags und M die Masse des Bags (nach Bartelski et al. (Ba 84)).

In den folgende 1 Tabellen 6.4 (a)-(c) sind die Resultate für die magnetischen Momente μ und die elektromagnetischen Ladungsradien $\langle r^2 \rangle$ der Baryonen, sowie für die Axial-Vektor Kopplungskonstante g_A von Proton und Neutron zusammengestellt, die wir unter Verwendung der Bag Radien R_0 aus Tabelle 6.1 und der Formeln aus Tabelle 6.3 berechnet haben.

Tabelle 6.4 : (nachfolgende Seite)

Magnetische Momente und Ladungsradien der $J^P = \frac{1}{2}^+$ Baryonen und Axial-Vektor Kopplungskonstante der die Nukleonen. Die Superskripte bedeuten: *stat* $\equiv$ statische Werte, *corr* $\equiv$ Werte unter Berücksichtigung der Schwerpunkt - Korrekturen, *Exp* $\equiv$ experimentelle Werte (Die experimentellen Daten stammen aus : Particle Data Group, *Review of Particle Properties*, Phys Lett B204 (1988)).

a)

Teilchen	$2 M_P \mu^{stat}$	$2 M_P \mu^{corr}$	$2 M_P \mu^{Exp}$	$(\mu / \mu_P)^{corr}$	$(\mu / \mu_P)^{Exp}$
P	1.22	2.09	2.79	1	1
N	- 0.81	- 1.18	- 1.91	- 0.56	- 0.68
Σ^+	1.19	1.88	2.42	0.89	0.87
Σ^0	0.38	0.53	?	0.25	?
Σ^-	- 0.42	- 0.81	- 1.16	- 0.39	- 0.42
Λ	- 0.34	- 0.48	- 0.61	- 0.23	- 0.22
Ξ^0	- 0.73	- 0.99	- 1.25	- 0.47	- 0.45
Ξ^-	- 0.32	- 0.31	- 0.69	- 0.15	- 0.25

b)

Teilchen	$\langle r^2 \rangle^{stat}$ (GeV^{-2})	$\langle r^2 \rangle^{corr}$ (GeV^{-2})	$\sqrt{\langle r^2 \rangle^{corr}}$ (fm)	$\sqrt{\langle r^2 \rangle^{Exp}}$ (fm)
P	5.44	4.47	0.423	0.84
N	0	0	0	- 0.34 (?)
Σ^+	5.63	4.93	0.444	?
Σ^0	0.19	0.23	0.096	?
Σ^-	- 5.25	- 4.47	- 0.423	?
Λ	0.19	0.23	0.096	?
Ξ^0	0.38	0.45	0.134	?
Ξ^-	- 5.06	- 4.43	- 0.421	?

c)

	g_A^{stat}	g_A^{corr}	g_A^{Exp}
$P \rightarrow N$	1.09	1.42	1.27

Zu den in Tabellen 6.4 (a)-(c) zusammengestellten Ergebnissen ist zu bemerken:

- Aus Tabelle 6.4(a) ist ersichtlich, daß unsere berechneten *magnetischen Momente* μ^{corr} deutlich kleiner sind als die experimentellen Werte μ^{Exp} , was auf die kleinen Bag Radien zurückzuführen ist. Wenn wir jedoch das magnetische Moment des Protons μ_P als Referenzwert wählen und alle anderen Momente auf μ_P normieren, so ergibt sich eine recht akzeptable Übereinstimmung mit den experimentellen Werten (4. und 5. Spalte in Tab. 6.4 (a)).
- Die deutlichste Diskrepanz zwischen unseren Berechnungen und den experimentellen Daten zeigt sich für die *mittleren Ladungsradien von Proton und Neutron*. Als Folge der kleinen Bag Radien und einer weiteren Verringerung durch die Schwerpunktkorrektur sind die Werte $\langle r^2 \rangle^{corr}$ bei weitem zu klein (Tab. 6.4 (b)).

Allerdings findet man im 'chiralen Bag Modell' (DeT 81, The 82), daß pionische Korrekturen den Ladungsradius des Protons um etwa einen Faktor 2 vergrößern, während sich für den Ladungsradius des Neutrons eine Korrektur von $-0.3 fm$ ergibt, wenn man Bag Radien von $\simeq 3.5 GeV^{-1}$ zugrunde legt. Natürlich lassen sich diese Ergebnisse nicht einfach auf unser Modell übertragen. Nichtsdestotrotz wird dadurch deutlich, daß in Anbetracht solch großer pionischer Korrekturen unsere Werte für die Ladungsradien von Proton und Neutron recht nahe an die experimentellen Werte heranrücken würden.

- Die *Axial-Vektor Kopplungskonstante für die Nukleonen* schließlich kommt etwas zu groß heraus, sie liegt allerdings nur um etwa 10% über dem experimentellen Wert (Tab. 6.4 (c)).

Fazit dieser Analyse : Angesichts der nicht unzweideutigen Interpretation der schar-

fen Bag Radien als die physikalischen hadronischen Radien erhalten wir in unserem Modell trotz der kleinen Bag Radien recht befriedigende Werte für die magnetischen Momente μ der Baryonen und die Axial-Vektor Kopplungskonstante g_A der Nukleonen. Die Ladungsradien $\langle r^2 \rangle$ sind zwar eindeutig zu klein, jedoch in Anbetracht der Tatsache, daß gerade die Ladungsradien wahrscheinlich von deutlichen pionischen Korrekturen betroffen sind, ist diesem Mangel unseres Modells nicht zu große Bedeutung beizumessen.

(iv) Die Werte für $\alpha_S(\Lambda R)$ und Λ :

Da α_S in unserem Modell eine Funktion von R , Gl.(5.29), ist, variieren die Werte für die Kopplungsstärke $\alpha_S(\Lambda R)$ zwischen 0.67 und 0.98 als Folge der unterschiedlichen Bag Radien der einzelnen Hadronen. ³

Obwohl man keine definitive Aussage über die Konvergenz der Störungsentwicklung in α_S für die Kavität machen kann ohne die Beiträge höherer Ordnungen explizit zu berechnen, ist es dennoch befriedigend, daß wir ein $\alpha_S \leq 1$ erhalten. Dies ist eine deutliche Verbesserung gegenüber früheren Bag Modell Rechnungen, in denen man ein (konstantes) $\alpha_S \simeq 2.2$ benötigt. Die kleinen Werte von α_S in unserem Modell hängen natürlich mit den kleinen Bag Radien R_0 zusammen, da $\alpha_S(R_0)/R_0$ in erster Linie durch die $P - \Delta$ Aufspaltung fixiert wird.

Für den Skalenparameter Λ , der die Skala der Wechselwirkungsstärke festlegt und via $\alpha_S(\Lambda R)$ die Kopplung der Quarks und Gluonen bestimmt, erhalten wir einen Wert von $\Lambda = 167 \text{ MeV}$. Wie in Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1 (iii), erläutert wird Λ in der *freien QCD* durch die Renormierungsprozedur definiert. Da es bislang kein

³Interessanterweise stimmen diese Werte nahezu überein mit Ergebnissen aus Potential-Modell Untersuchungen des Meson Spektrums (Ba 81a) mit typischen Werten $\alpha_S = 0.6 - 0.8$.

vergleichbares Konzept zur Durchführung des Renormierungsprogramms für die *im Bag eingesperrte QCD* gibt, können wir keine konkrete Aussage darüber machen, ob unser an das Hadron Spektrum angepaßter Wert für Λ vernünftig ist. Nichtsdestotrotz ist es befriedigend, daß wir mit $\Lambda = 167 \text{ MeV}$ in der Größenordnung von z.B. $\Lambda_{MS} \simeq \Lambda_{PV} \simeq 100 - 250 \text{ MeV}$ liegen.

(v) Die Werte für $\epsilon_S^{(q)}$ und $m^{(s)}$:

Unser Fit ergibt für den Selbstenergie-Parameter $\epsilon_S^{(q)}$ der Quarks einen relativ großen, negativen (!) Wert, $\epsilon_S^{(q)} = -1.06$. Dies bedeutet, daß in unserem Modell die Selbstenergie eines Quarks $\Delta E_S^{(q)} = \frac{\alpha_S(R_0)}{R_0} \cdot \epsilon_S^{(q)} \simeq -0.3 \text{ GeV}$ betragen würde (für $\frac{\alpha_S(R_0)}{R_0} \approx 0.29 \text{ GeV}$). Im Vergleich dazu beträgt die Einteilchen-Energie eines Quarks im Bag für die niedrigste Eigenschwingung $E_0^{(q)} = \frac{2.043}{R_0} \approx 0.6 - 0.7 \text{ GeV}$ (für $R_0 \approx 2.8 - 3.3 \text{ GeV}^{-1}$). Dies zeigt, daß die Selbstenergiebeiträge in unserem Modell eine nicht vernachlässigbare Rolle spielen !

Es ist klar, daß $\epsilon_S^{(q)}$ hier eine effektive, phänomenologische Größe ist, die sozusagen als Schublade für die nicht berechneten Selbstenergie-Diagramme dient (vgl. Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1 (ii)). Insbesondere haben wir $\epsilon_S^{(u)} = \epsilon_S^{(d)} = \epsilon_S^{(s)} \equiv \epsilon_S^{(q)}$ gesetzt und nehmen dabei an, daß Differenzen zwischen den Selbstenergien von u - bzw. d - und s - Quarks effektiv in der gefitteten s - Quark Masse $m^{(s)}$ berücksichtigt werden.

Zur expliziten Berechnung der $O(\alpha_S)$ - Selbstenergiebeiträge für Quarks existieren mehrere Arbeiten. Wie erwähnt (Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1 (iii)) sind die Resultate der einzelnen Gruppen recht widersprüchlich. So finden (Ba 83) und (Go 83, Go 86) übereinstimmend $\epsilon_S^{(q)} \approx +0.93$, wohingegen (Br 82) $\epsilon_S^{(q)} \approx +0.16$ und (Chi 82) $\epsilon_S^{(q)} \approx +0.6$ erhalten. Wiederum andere Werte liefern Bag Modell Rechnungen, die wie wir die Selbstenergiebeiträge parametrisieren : (Ca 83) finden $\epsilon_S^{(q)} = -0.8$, was

mit unserem Resultat $\epsilon_S^{(q)} = -1.06$ vergleichbar ist. (Cha 83) verwenden ebenfalls das Bag Modell, allerdings mit einem etwas anderen Parametersatz. Übersetzt in unser Modell entsprächen die Werte für die Quark-Selbstenergie etwa $\epsilon_S^{(q)} \approx (-0.6) - (-0.9)$. Kurzum, die Situation ist sehr kontrovers, insbesondere was das Vorzeichen der Quark-Selbstenergiebeiträge angeht. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen den explizit berechneten Werten einerseits und der effektiven Parametrisierung der Selbstenergie andererseits nicht klar. Insofern sollten die Diskrepanzen zwischen den theoretischen Berechnungen und den phänomenologischen Werten von $\epsilon_S^{(q)}$ nicht zu ernst genommen werden.

Der Wert für die s - Quarkmasse schließlich, $m^{(s)} = 268 \text{ MeV}$, ist in guter Übereinstimmung mit anderen Bag Modell Rechnungen und dem Wert, den man auch in grober Abschätzung erwarten würde, nämlich $m^{(s)} \approx 260 - 290 \text{ MeV}$ (Lee 82).

(vi) Die Bag Konstante $B^{1/4}$:

Wir erhalten eine relativ große Bag Konstante $B^{1/4} = 240 \text{ MeV}$, verglichen mit früheren Bag Modell Rechnungen (z.B. DeG 75, Do 80, Cha 82), in denen $B^{1/4} \simeq 130 - 150 \text{ MeV}$ beträgt (vgl. Tabelle 6.2). Dieser große Wert von $B^{1/4}$ ist wiederum mit unseren kleinen Bag Radien verknüpft.

Die Bag Konstante selbst ist keine direkt observable Größe. Allerdings läßt sie sich mit dem sogenannten *Gluonkondensat des QCD-Vakuums* in Verbindung bringen : Aus den 'Charmonium Summenregeln' (Shi 79) und durch Vergleich mit experimentellen Daten erhält man eine Abschätzung für den Wert des Gluonkondensats (Gu 81):

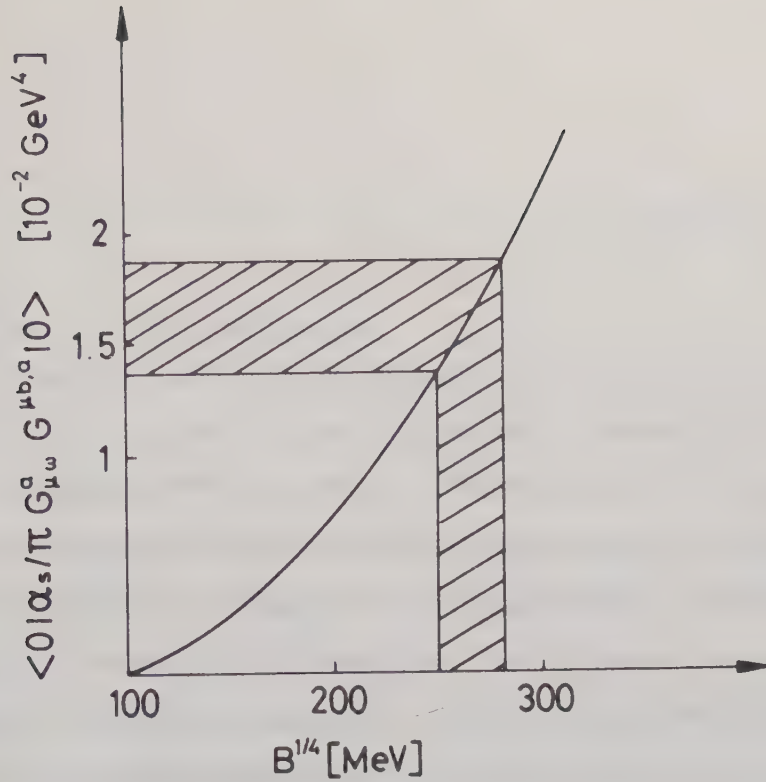
$$\langle O | \frac{\alpha_S}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} | O \rangle = \left(1.5 \begin{array}{c} +0.4 \\ -0.2 \end{array} \right) \cdot 10^{-2} \text{GeV}^4 \quad (6.2)$$

Das Gluonkondensat ist proportional zur Energiedichte ε des (nicht-störungstheoretischen) QCD-Vakuums $| O \rangle$ und hängt mit der Bag Konstanten über

$$\varepsilon = -\frac{9}{32} \langle O | \frac{\alpha_S}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} | O \rangle = -B \quad (6.3)$$

zusammen (Fl 83, Shu 84).

Diese Relation erlaubt eine vom Bag Modell unabhängige Bestimmung der Bag Konstanten $B = |\varepsilon|$. In Figur 6.4 ist $\langle O | \frac{\alpha_S}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} | O \rangle$ gegenüber $B^{1/4}$ aufgetragen. Daraus wird ersichtlich, daß die Abschätzung für das Gluonkondensat (6.2) einen Wert von $B^{1/4} \approx 250 \text{ MeV}$ impliziert, was erstaunlich gut mit unserem Wert $B^{1/4} = 240 \text{ MeV}$ übereinstimmt. Dagegen sind kleinere Werte wie $B^{1/4} = 145 \text{ MeV}$ aus früheren Bag Modell Rechnungen nach Figur 6.4 bzw. Gl.(6.2) auszuschließen.



Figur 6.4 :

Das *Gluonkondensat* $\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} | 0 \rangle$ als Funktion der Bag Konstanten $B^{1/4}$ (nach Referenz Fl 83).

6.1.5 Fazit unserer Analyse des Hadron Spektrums :

Unser Modell reproduziert das Massenspektrum der Baryonen und Mesonen (mit Einschränkung für Pion und Kaon) in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten. Die Ergebnisse sind zum Teil besser als in anderen Bag Modell Untersuchungen des Hadron Spektrums.

Die Anpassung unserer Parameter ergibt phänomenologisch plausible Werte für $B^{1/4}$, Λ und $m^{(s)}$.

Gegenüber früheren Bag Modell Rechnungen finden wir relativ kleine Bag Radien ($\simeq 3 \text{ GeV}^{-1}$) und eine wesentlich kleinere Kopplungskonstante $\alpha \leq 1$.

6.2 Glueballs

Wir kommen nun zur Spektroskopie des Glueballs. Die ausgezeichnete Reproduktion des experimentellen Massenspektrums der Hadronen mit physikalisch plausiblen Werten für die Parameter $B^{1/4}$, Λ , $\epsilon_S^{(q)}$ und $m^{(*)}$ ermutigt uns zu der Annahme, daß unser Modell eine ebenso akkurate und glaubwürdige Vorhersage der Glueball-Massen erlaubt. Die Strategie ist, daß wir analog zur Analyse des Hadron-Spektrums in Abschnitt 6.1 vorgehen und *dieselben* Parameterwerte verwenden und so zu einer vereinheitlichten Beschreibung von Glueballs und Hadronen gelangen. Der einzige noch nicht festgelegte Parameter für den Glueball Sektor ist der Selbstenergie Parameter $\epsilon_S^{(g)}$ der Gluonen. Zur Fixierung von $\epsilon_S^{(g)}$ ziehen wir den hoffnungsvollsten Glueball-Kandidaten, das $\iota(1440)$ -Teilchen, für das recht verlässliche Daten zu Masse und Zerfalleigenschaften existieren (Cl 88, Pa 87). Dabei nehmen wir zunächst an, daß das $\iota(1440)$ in guter Näherung ein reiner Glueball ist, und höchstens geringfügige Beimischungen von quarkonischen Anteilen enthält. Nach dem derzeitigen Kenntnisstand ist diese Vermutung durchaus gerechtfertigt. Unabhängig davon implizieren die Resultate unserer Untersuchung von $q\bar{q}$ -Glueball-Mischungen, die wir in Kapitel 7 ausführen werden, daß $q\bar{q}$ -Beimischungen im $\iota(1440)$ nur etwa 20-25 Prozent ausmachen, so daß auch in unserem Modell das ι -Teilchen überwiegend aus gluonischen Komponenten besteht und daher zunächst in guter Näherung als ein nahezu reiner Glueball angesehen werden kann.

Mit der Anpassung des Selbstenergie Parameters $\epsilon_S^{(g)}$ der Gluonen an die Masse des ι -Teilchens ist unser Modell dann parameterfrei und vollständig festgelegt. Somit können wir definitive Vorhersagen über das Massenspektrum der restlichen niedrigliegenden Glueballs treffen.

6.2.1 Berechnung der Glueball Massen

Wir konstruieren Glueballs, indem wir zwei massenlose Spin 1 - Gluonen in den sphärischen Bag einsperren. Die Forderung des Farb-Confinements wird durch die Randbedingung Gl.(4.24) implementiert und erzwingt, daß kein (farbelektrischer) Gluon-Strom durch die Bag Oberfläche fließt. Dies führt auf die ungestörten Gluon-Eigenmoden (Gl.(4.31) und Anhang A) mit den entsprechenden Eigenwerten. Zusammen mit den *Physikalitätsforderungen* (4.45) - (4.47) bedeutet das, daß *gg*-Glueballs aus zwei Valenz-Gluonen mit den physikalischen Polarisationen, transversal elektrisch (TE), Parität $P = (-1)^{l+1}$, bestehen, die untereinander transversal magnetisch (TM), Parität $P = (-1)^l$ bestehen, die untereinander wechselwirken.

Um die *Verwandtschaft der Glueballs mit den Hadronen* zu verdeutlichen und ein Gefühl für die Größenordnung der Glueball Massen zu bekommen, ist folgende Betrachtung instruktiv (Ca 88) :

Lassen wir zunächst die Wechselwirkung der Valenz-Teilchen außer Acht. Die niedrigsten Eigenwerte der Moden für Quarks und Gluonen im Bag sind dann

$$\text{Quarks :} \quad \varepsilon = \begin{cases} 2.043 & (1 S_{1/2}) \\ 3.812 & (1 P_{1/2}) \end{cases} \quad (6.4a)$$

$$\text{Gluonen :} \quad \omega = \begin{cases} 2.744 & (TE)_1 \\ 4.493 & (TM)_1 \end{cases} \quad (6.4b)$$

Da die Gluon Moden größere Eigenwerte als die der Quarks haben, sollten auch die leichtesten gg -Glueballs eine größere Masse als die niedrig liegenden $q\bar{q}$ -Mesonen haben. Unter Vernachlässigung der Wechselwirkung der Konstituenten und unter der Annahme, daß die Bags von gg -Glueballs und $q\bar{q}$ -Mesonen vergleichbare Größe haben, erwartet man, daß der leichteste Glueball $(TE)_1(TE)_1$ eine Masse von etwa 1 GeV hat (Cl 88).

Die niedrigst liegenden Glueballs sollten demnach die gg -Glueballs

$$(TE)_1(TE)_1 : J^{PC} = \begin{cases} 0^{++} \\ 2^{++} \end{cases} ; M \approx 1.0\text{ GeV} \quad (6.5)$$

sein, und etwas darüberliegend

$$(TE)_1(TM)_1 : J^{PC} = \begin{cases} 0^{-+} \\ 2^{-+} \end{cases} ; M \approx 1.3\text{ GeV} \quad (6.6)$$

Bemerkenswert ist, daß zwei *physikalische* Spin 1 - Gluonen als Color-Singlett weder zu $J^{PC} = 1^{-+}$ noch zu $J^{PC} = 1^{++}$ gekoppelt werden können (da die Gluonen aufgrund ihres bosonischen Charakters der Bose Statistik genügen müssen).

Glueballs, die aus drei oder mehr Valenz-Gluonen bestehen haben entsprechend größere Massen. Der leichteste ggg -Glueball wäre unter Vernachlässigung der Wechselwirkung

$$(TE)_1(TE)_1(TE)_1 : J^{PC} = \begin{cases} 0^{++} \\ 1^{+-} \\ 3^{+-} \end{cases} ; M \approx 1.5\text{ GeV} \quad (6.7)$$

je nachdem, ob die drei Gluonen symmetrisch (0^{++}) oder antisymmetrisch ($1^{+-}, 3^{+-}$) zu einem Color-Singlett gekoppelt werden.

Allerdings wird dieses naive Bild des Glueball Massenspektrums wesentlich modifiziert, wenn die Wechselwirkung der Valenz-Gluonen berücksichtigt wird. Wie bei den Hadronen, wo die Wechselwirkung der Quarks zu einer Aufspaltung der Zustände mit verschiedenem Gesamtdrehimpuls J um mehrere 100 MeV führt (z.B. beträgt die Proton- Δ Massenaufspaltung $|M(P, J = \frac{1}{2}) - M(\Delta, J = \frac{3}{2})| \approx 300 \text{ MeV}$), so wird auch die Entartung der Glueball Zustände zu unterschiedlichem J in (6.5) - (6.7) aufgehoben. Für die Glueballs ist dieser Effekt, wie wir sehen werden, noch größer als für die Hadronen. Das liegt daran, daß die Gluonen ein Color-Oktett bilden und außerdem Spin 1 haben, wohingegen die Quarks Color-Triplett, Spin $1/2$ - Zustände sind, so daß sowohl die Farb - als auch die Spin - Wechselwirkung der Gluonen deutlich stärker ist. Diese Eigenschaft wird in Abschnitt 6.2.5 näher untersucht.

Die *Berechnung der Glueball Massen in unserem Modell* verläuft analog zum Fall der Hadronen in Abschnitt 6.1 :

- Wir betrachten ausschließlich Glueballs mit zwei Valenz-Gluonen, da diese die leichtesten Glueballzustände sind und daher vom phänomenologischen Standpunkt aus am interessantesten sind.
- Dementsprechend konstruieren wir die $g_1 g_2$ - Wellenfunktionen (Gl.(5.7c)) durch Kopplung zweier solcher Valenz-Gluonen zu einem Color-Singlett mit gutem Drehimpuls J , Parität P und Ladungspartität C , unter Berücksichtigung der Physikalitätsbedingungen (4.45) - (4.47) wie in Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1 (ii) erläutert.
- Die Wechselwirkung der Gluonen berechnen wir durch Auswertung der entspre-

chenden Matrixelemente (5.10c). Die Massen der Glueballs erhalten wir dann aus den Formeln (5.21) - (5.31), d.h. unter Berücksichtigung von Konfigurationsmischungen, Schwerpunktkorrekturen und der $O(\alpha_S)$ - Selbstenergiebeiträge der Gluonen.

- Für $B^{1/4}$ und den Skalenparameter Λ verwenden wir die Werte aus dem Parameterfit des Hadronspektrums in Abschnitt 6.1.
- Der einzige noch unbestimmte Parameter für den Glueball Sektor ist der Selbstenergie Parameter der Gluonen $\epsilon_S^{(g)}$. Zwar ist $\epsilon_S^{(g)}$, wie auch der Selbstenergie Parameter der Quarks, $\epsilon_S^{(q)}$, eine effektive Größe, dennoch muß man im Grunde unterscheiden zwischen TE - und TM -Gluonen. Unter der Annahme, daß $\epsilon_S^{(TE)} \leq \epsilon_S^{(TM)}$ (andernfalls ergäbe sich eine Selbstenergie für die TE -Gluonen, die größer als ihre kinetische Energie wäre), haben wir die drei Fälle $\epsilon_S^{(TE)} = \epsilon_S^{(TM)}$, $\epsilon_S^{(TE)} = \frac{2}{3} \epsilon_S^{(TM)}$ und $\epsilon_S^{(TE)} = \frac{1}{2} \epsilon_S^{(TM)}$ untersucht (vgl. Diskussion in 6.2.4).
- Die Anpassung von $(\epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)})$ an die Masse des $\iota(1440)$ -Teilchens als $(TE)(TM)$ - Glueball ($J^{PC} = 0^{-+}$) setzt somit die Massenskala des Glueball Spektrums fest, so daß wir konkrete Vorhersagen über die Massen der anderen niedrig liegenden gg -Glueballs machen können.

6.2.2 Resultate für das Glueball Massenspektrum

In Tabelle 6.5 und Figur 6.5 sind unsere Resultate für die Massen der niedrigst liegenden gg -Glueballs zusammengestellt. Für $B^{1/4}$, Λ und die Konstante n , die in

die gleitende Kopplungskonstante $\alpha_S(\Lambda R)$ eingeht, wurden dieselben Werte wie für das Hadronspektrum verwendet (vgl. Abschnitt 6.1.1).

Die Masse des $\iota(1440)$ -Teilchens ($J^{PC} = 0^{-+}$) wurde als Input verwendet, um die effektiven Gluon-Selbstenergien $\epsilon_S^{(TE)}$ und $\epsilon_S^{(TM)}$ zu fixieren. Die Masse des 0^{-+} -Glueballs legt daher die Massenskala des Spektrums fest und ist als Referenzwert anzusehen, relativ zu dem sich die anderen Zustände ansiedeln.

Wir zeigen die berechneten Massen für die Glueballs mit $J^{PC} = 0^{++}, 0^{-+}, 2^{++}, 2^{-+}$ sowie jeweils der ersten beiden angeregten Zustände und zwar für die drei Fälle, daß

$$\begin{aligned} a) \quad & \epsilon_S^{(TE)} = \epsilon_S^{(TM)} \\ b) \quad & \epsilon_S^{(TE)} = 2/3 \epsilon_S^{(TM)} \\ c) \quad & \epsilon_S^{(TE)} = 1/2 \epsilon_S^{(TM)} \end{aligned}$$

mit fixiertem Wert für $\epsilon_S^{(0^{-+})} \equiv \epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)}$ aus dem Fit an $\iota(1440)$. Zum Vergleich sind die experimentellen Massen einiger potentieller Glueball Kandidaten gegenübergestellt (näheres dazu in Abschnitt 6.2.3).

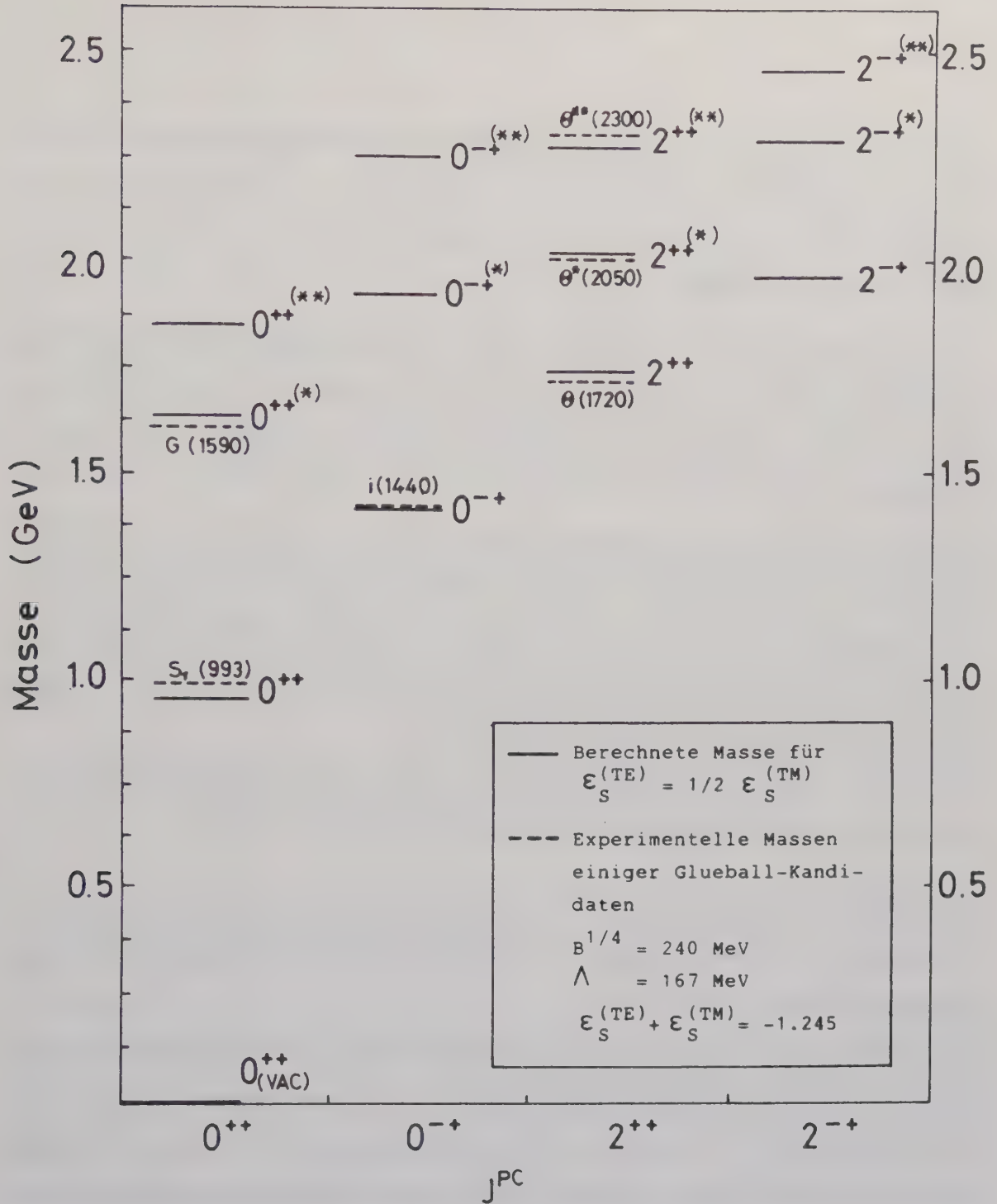
J^{PC}	$M_{EXP} (GeV)$	$M_{BAG} (GeV)$	$R_o (GeV^{-1})$	$\alpha_S(R_o)$
0_{VAC}^{++}	-	$\simeq 0$	2.72	0.791
0^{++}	0.993 (?)	a) 0.796 b) 0.965 c) 1.082	3.20	0.928
$0^{++} (*)$	1.590 (?)	a) 1.534 b) 1.659 c) 1.741	3.36	0.977
$0^{++} (**)$	?	a) 1.674 b) 1.790 c) 1.867	3.36	0.977
2^{++}	1.720 (?)	a) 1.645 b) 1.742 c) 1.801	3.12	0.904
$2^{++} (*)$	2.010 (?)	a) 1.847 b) 2.087 c) 2.150	3.20	0.928
$2^{++} (**)$	2.300 (?)	a) 2.173 b) 2.270 c) 2.336	3.28	0.952
0^{-+}	<u>1.440</u> (?)	1.440	3.12	0.904
$0^{-+} (*)$	?	1.901	3.28	0.952
$0^{-+} (**)$	?	2.270	3.36	0.977
2^{-+}	?	1.982	3.20	0.928
$2^{-+} (*)$	?	2.292	3.36	0.977
$2^{-+} (**)$	?	2.434	3.36	0.977

Parameterwerte:

Bag-Konstante	$B^{\frac{1}{4}}$	= 240 MeV	aus Parameter-Fit des Hadron-
Skalenparameter	Λ	= 167 MeV	Spektrums (Abschnitt 6.1)
Gluon-Selbstenergie	$\epsilon_S^{(0^{-+})}$	$\equiv \epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)}$	= -1.245

Tabelle 6.5 :

Glueball Massen der niedrigstliegenden gg -Glueballs und der jeweils ersten beiden angeregten Zustände $(*)$, $(**)$ für a) $\epsilon_S^{(TE)} = \epsilon_S^{(TM)}$, b) $\epsilon_S^{(TE)} = \frac{2}{3} \epsilon_S^{(TM)}$ und c) $\epsilon_S^{(TE)} = \frac{1}{2} \epsilon_S^{(TM)}$. Die experimentelle Masse des $\iota(1440)$ -Teilchens als Kandidat für den 0^{-+} -Glueball (unterstrichen) wurde zur Anpassung der Gluon-Selbstenergie Parameter $\epsilon_S^{(TE)}$, $\epsilon_S^{(TM)}$ durch die Bedingung $\epsilon_S^{(0^{-+})} \equiv \epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)}$ verwendet.



Figur 6.5 :

Massenspektrum der niedrigst liegenden Glueballs mit angegebenen Quantenzahlen J^{PC} . Die Masse des 0^{-+} -Zustands ist an $i(1440)$ gefittet und determiniert die Gluon-Selbstenergie Parameter $\epsilon_S^{(TE)}$, $\epsilon_S^{(TM)}$. Alle anderen Parameterwerte stammen aus dem Fit an das Hadronspektrum (vgl. Abschnitt 6.1, Tabelle 6.1).

6.2.3 Diskussion und phänomenologische Schlußfolgerungen

(i) Der $0^{++}_{(VAC)}$ -Zustand

Der 0^{++} -Zustand, welcher aus zwei TE -Gluonen in der niedrigsten Bag - Eigenmode besteht, wird durch die Wechselwirkung derart stark nach unten gedrückt, daß seine Masse ≤ 0 herauskommt. In Tabelle 6.5 und Figur 6.5 ist dieser Zustand als $0^{++}_{(VAC)}$ bezeichnet.

Diese Eigenschaft ist vom phänomenologischen Blickwinkel her betrachtet äußerst interessant. Es wird generell vermutet, daß der niedrigste 0^{++} -Glueball stark mit dem Vakuum mischt, weil er dieselben Quantenzahlen wie der Vakuumzustand trägt. In unserem Modell stellt sich nun heraus, daß der energetisch niedrigste 0^{++} -Zustand *kondensiert* und mit dem Vakuum entartet ist.

Zur Diskussion der physikalischen Bedeutung eines solchen *Glueballkondensats* verweisen wir auf die interessante Arbeit von Carlson et al. (Ca 83 b).

Die Ursache für solch einen mit dem Vakuum entarteten (oder zumindest nahezu entarteten) 0^{++} -Zustand in unserem Modell liegt in zweierlei Eigenschaften des gg -Systems begründet:

Zum einen ist die Wechselwirkung der beiden Gluonen wesentlich stärker als die entsprechende Quark-Antiquark Wechselwirkung (vgl. untenstehende Analyse in Abschnitt 6.2.5 (iii)). Zum anderen hat die Berücksichtigung von virtuellen, höher angeregten gg -Zuständen durch die Diagonalisierung der Wechselwirkungs-Matrix (gemäß dem Konzept aus Kap.5, Gl.(5.19), (5.25)) einen zusätzlichen, drastischen Effekt speziell auf diesen niedrigst liegenden 0^{++} -Zustand; im Gegensatz zur entsprechenden $q\bar{q}$ -Wechselwirkung, wo die Prozedur der Diagonalisierung nur eine vernachlässigbare

Verschiebung der Energie-Niveaus bewirkt.

Die Energie dieses $0_{(VAC)}^{++}$ -Zustands reagiert empfindlich auf die Wahl der Parametrisierung für die Gluon-Selbstenergie der Gluonen $\epsilon_S^{(g)}$. Je nachdem, ob wir $\epsilon_S^{(TE)} = \epsilon_S^{(TM)}$, $\epsilon_S^{(TE)} = \frac{2}{3} \epsilon_S^{(TM)}$ oder $\epsilon_S^{(TE)} = \frac{1}{2} \epsilon_S^{(TM)}$ ansetzen, variiert die Masse dieses Zustands zwischen deutlich $< 0 \text{ GeV}$ und etwa $+0.2 \text{ GeV}$.

Es ist allerdings zu betonen, daß unabhängig davon, ob die Masse dieses $0_{(VAC)}^{++}$ -Zustands nun negativ herauskommt, oder aber im Bereich von $\approx +200 \text{ MeV}$ liegt, die Massen der nächst höheren Zustände des Spektrums in jedem Fall von der Größenordnung $1 - 2 \text{ GeV}$ sind.

Ein Spektrum von Glueball-Zuständen mit Massen in der Größenordnung MeV gibt es nicht im Rahmen der QCD !

Dies ist einfach eine Konsequenz der Tatsache, daß die Energie-Skala in unserem Modell durch die beiden dimensionsbehafteten Größen, den QCD-Skalenparameter Λ und die Bag-Radien R_0 bestimmt ist. Daher betragen die Abstände zwischen den Energie-Niveaus der Zustände zwangsläufig mehrere hundert MeV .

(ii) Die starke Massenaufspaltung

Das grobe Bild des Spektrums, welches wir in Abschnitt 6.2.1 (unter Vernachlässigung der Wechselwirkung) gezeichnet haben, wird wesentlich verändert. Die Wechselwirkung der Gluonen führt zu einer drastischen Aufspaltung zwischen den Zuständen mit $J^{PC} = 0^{++}$, 2^{++} und ebenso zwischen den $J^{PC} = 0^{-+}$, 2^{-+} -Zuständen.

Im Kontrast zur naiven Abschätzung, (6.5) und (6.6), die $M(0^{++}) = M(2^{++}) \approx 1 \text{ GeV}$ und $M(0^{-+}) = M(2^{-+}) \approx 1.3 \text{ GeV}$ ergibt, finden wir einen deutlich unter 1 GeV liegenden 0^{++} -Glueball, während der 2^{++} -Grundzustand auf über 1.6 GeV heraufgedrückt wird. Die Wechselwirkung der Gluonen führt also zu einem 'Splitting'

von $\approx 850 \text{ MeV}$.

Entsprechend wird der 2^{-+} -Zustand gegenüber dem 0^{-+} -Glueball stark nach oben verschoben. Die Aufspaltung ist jedoch mit $\approx 450 \text{ MeV}$ deutlich geringer als das $(0^{++} - 2^{++})$ -Splitting.

Die Aufhebung der Entartung zwischen den Zuständen mit gleichen Quantenzahlen P, C aber unterschiedlichem Gesamtdrehimpuls J ist im Fall der Glueballs offensichtlich wesentlich stärker als für die Hadronen, für die die Aufspaltung zwischen den $J = \frac{1}{2}$ -Baryonen und den $J = \frac{3}{2}$ -Baryon-Resonanzen typischerweise $200 - 300 \text{ MeV}$ beträgt (vgl. Tabelle 6.1, Figur 6.3).

Die Ursache für die starke Massenaufspaltung der Glueballs und für die damit zusammenhängende Eigenschaft eines *kondensierten* $0_{(VAC)}^{++}$ -Zustands, werden wir in Abschnitt 6.2.5 zu klären versuchen.

(iii) Vergleich mit der experimentellen Situation

Die quantitativ recht gute Übereinstimmung zwischen dem berechneten Glueball Spektrum und den experimentellen Massen einiger potentieller Glueball Kandidaten ist bemerkenswert, insbesondere für den Fall $b) \epsilon_S^{(TE)} = \frac{2}{3} \epsilon_S^{(TM)}$. Dennoch erlaubt diese suggestive Gegenüberstellung keine voreiligen Schlußfolgerungen. Wirklich definitive Aussagen zu treffen ist aus zwei Gründen schwierig :

1. Trotzdem unser Modell aufgrund der ausgezeichneten Reproduktion des Hadron Spektrums auf festem Boden steht, ist es auf dem Glueball Sektor mit Unsicherheiten belastet. Zum einen haben wir bis jetzt angenommen, daß die gg -Zustände Glueballs in Reinform sind und keine quarkonischen Beimischungen enthalten, was in der Realität bestenfalls näherungsweise erfüllt ist (siehe Punkt 2.). Zum anderen stellt unsere Unkenntnis über die tatsächlichen Gluon

- Selbstenergien und die zwangsläufige Parametrisierung dieser Beiträge einen weiteren Unsicherheitsfaktor dar.

2. Die experimentelle Situation ist derzeit noch recht kontrovers und gesicherte Daten über Massenspektrum und Zufallsmechanismen möglicher Glueballs sind rar. Eine eindeutige experimentelle Identifikation von Glueball - Zuständen steht noch aus (vgl. Diskussion in Kapitel 2). Insbesondere ist nicht klar, inwieweit die potentiellen Glueball Kandidaten aus Tabelle 6.5 mit gewöhnlichen $q\bar{q}$ -Mesonen mischen oder eine Interpretation als Glueballs gar zweifelhaft ist.

Zur Diskussion des derzeitigen *Erkenntnisstands der Glueball - Forschung* hinsichtlich experimenteller Daten und deren verschiedenen Interpretationen existieren mehrere Review-Artikel (z.B. Cl 88, Pa 87, Ko 87, PD 88 S.304). Die Aussagen sind im wesentlichen die folgenden :

1. 0^{++} -Sektor :

Die Resonanz $S_1(993)$ wird als möglicher 0^{++} -Glueball angesehen. Diese Hypothese basiert auf der Analyse komplexer Strukturen in den Wirkungsquerschnitten von $(\pi - \pi)$ - und $(K - \bar{K})$ -Streuexperimenten in der Umgebung der $k\bar{k}$ -Schwelle 988 MeV .

Ein weiterer Glueball Kandidat ist die Resonanz $G(1590)$, die in $(\pi - p)$ -Reaktionen beobachtet wird. Analysen der Zerfallseigenschaften des $G(1590)$ legen eine Interpretation als Glueball oder aber als $q\bar{q}q\bar{q}$ -Quark Molekül nahe, wobei die erste Hypothese favorisiert wird.

2. 0^{-+} -Sektor :

Das $\iota(1440)$ mit $J^{PC} = 0^{-+}$ ist der hoffnungsvollste Glueball Kandidat; zum einen deswegen, weil das 0^{-+} -Nonett der $q\bar{q}$ -Mesonen mit π , κ , η und η' schon

vollständig ist und zum anderen, weil seine Lebensdauer, Zerfallsmoden und Erzeugungsraten mit typisch mesonischen Eigenschaften unverträglich sind. Zudem wird das ι als deutliche Resonanz in den 'Gluon reichen' Reaktionen der J/ψ -Strahlungszерfälle beobachtet. Allerdings zeigen verschiedene experimentelle Analysen, daß das ι (1440) kein Glueball in Reinform ist, sondern mit dem pseudoskalaren Mesonen η (549) und η' (958) mischt und vermutlich signifikante $q\bar{q}$ -Anteile enthält.

3. 2^{++} -Sektor :

Die Interpretation des θ (1720) und der angeregten Zustände θ (2010), θ (2300) als 2^{++} -Glueballs wird vor allem durch die Zerfalleigenschaften und Produktionsmechanismen nahegelegt. Eines der Hauptargumente ist, daß das θ (1720) vor allem in den 'Gluon reichen' J/ψ -Strahlungszерfällen beobachtet wird, wo es durch relativ große Produktionsraten hervorsteht. Obwohl nach den experimentellen Daten auch eine Deutung des θ -Teilchens als $q\bar{q}g$ -Hybrid oder gar als $qq\bar{q}\bar{q}$ -Quark Molekül denkbar ist, wird die Glueball - Hypothese als die wahrscheinlichste angesehen.

Die Resonanzen θ (2010), θ (2300) wurden in der Reaktion $\pi p \rightarrow \phi\phi\eta$ beobachtet, die nach der 'OZI-Regel' verboten ist und daher wahrscheinlich vorwiegend durch intermediäre Glueballzustände vermittelt wird. Dies wird als starkes Argument für eine Glueball - Interpretation der Resonanzen θ (2010) und θ (2300) angesehen.

(iv) Resumee :

Trotz der Ungewißheiten in experimenteller wie in theoretischer Hinsicht können wir folgende Aussagen machen :

1. Unser Modell gibt einen wertvollen Anhaltspunkt für die qualitative Struktur des Glueball Spektrums und macht konkrete Vorhersagen über die Massenskala und die Hierarchie der niedrigst liegenden Glueballs bzgl. ihrer Quantenzahlen J^{PC} . In Übereinstimmung mit den allgemeinen Erwartungen ergibt sich in unserem Modell:

$$M(0^{++}) < M(0^{-+}) < M(2^{++}) < M(2^{-+})$$

2. Die Größenordnung der vorhergesagten Glueball Massen ist in guter Übereinstimmung mit experimentellen Kandidaten. In Anbetracht dessen, daß wir als einzigen Input die Masse des $\iota(1440)$ verwendet haben und alle anderen Massen unabhängig von experimentellen Daten vorhersagen, ist diese Übereinstimmung beachtlich.
3. Punkt 2. und der Vergleich mit anderen, unabhängigen theoretischen Untersuchungen zum Glueball Spektrum (vgl. Kapitel 2 und Abschnitt 6.2.4) lassen den Schluß zu, daß unsere Vorhersagen relativ unabhängig von den spezifischen Modellannahmen sind und als fundamentale Konsequenz der Eigenschaften der starken Wechselwirkung, bzw. der zugrunde liegenden Theorie der QCD anzusehen sind.

6.2.4 Vergleich mit anderen Bag Modell Rechnungen

Zur Untersuchung des Glueball Spektrums im Rahmen des Bag Modells existieren mehrere Arbeiten (z.B. Cl 81, Ba 82, Cha 83, Ca 83), die mit unserer Analyse verwandt sind. Gemeinsam haben die verschiedenen Bag Modell Ansätze, daß die Wechselwirkung der Gluonen in $O(\alpha_S)$ explizit berechnet wird, während die Selbstenergie Beiträge parametrisiert oder ganz außer Acht gelassen werden. Die hauptsächlichen Unterschiede liegen in der Wahl der Bag Modell Parameter und in der spezifischen Behandlung der unbekannten Selbstenergie der Gluonen :

- *Chanowitz und Sharpe* (Cha 83) passen ebenso wie wir die Gluon-Selbstenergie Beiträge $\epsilon_S^{(TE)}$, $\epsilon_S^{(TM)}$ an die Masse des $\iota(1440)$ an und untersuchen die Fälle $\epsilon_S^{(TE)} = \frac{1}{2}\epsilon_S^{(TM)}$, $\epsilon_S^{(TE)} = \epsilon_S^{(TM)}$ und $\epsilon_S^{(TE)} = 2\epsilon_S^{(TM)}$. Die Parameter des Modells sind die Bag Konstante $B^{1/4}$, die Kopplungskonstante α_S sowie der 'Casimir'-Parameter Z_0 , der Korrekturen zur Schwerpunktbewegung und Casimir-Energie berücksichtigt, und werden durch einen Fit an das Hadron Spektrum festgelegt.
- *Barnes et al.* (Ba 82) berechnen ebenfalls die Massenaufspaltung der Glueballs, ziehen aber weder die Gluon-Selbstenergie Beiträge noch Schwerpunktkorrekturen in Betracht. Die beiden Parameter dieses vereinfachten Ansatzes sind α_S und der mittlere Bag Radius R_0 , die an die Massen von ι - und θ - Teilchen angepaßt werden. Die Bag Konstante $B^{1/4}$ wird aus dem ursprünglichen MIT Fit (DeG 75) übernommen und nicht als Parameter behandelt.
- *Carlson et al.* (Ca 83) schließlich verwenden einen sehr eigenwilligen Bag-Modell Ansatz, der auf einem spezifischen Modell für das QCD Vakuum basiert. Die Grundidee ist, das störungstheoretische Vakuum als ein Kondensat

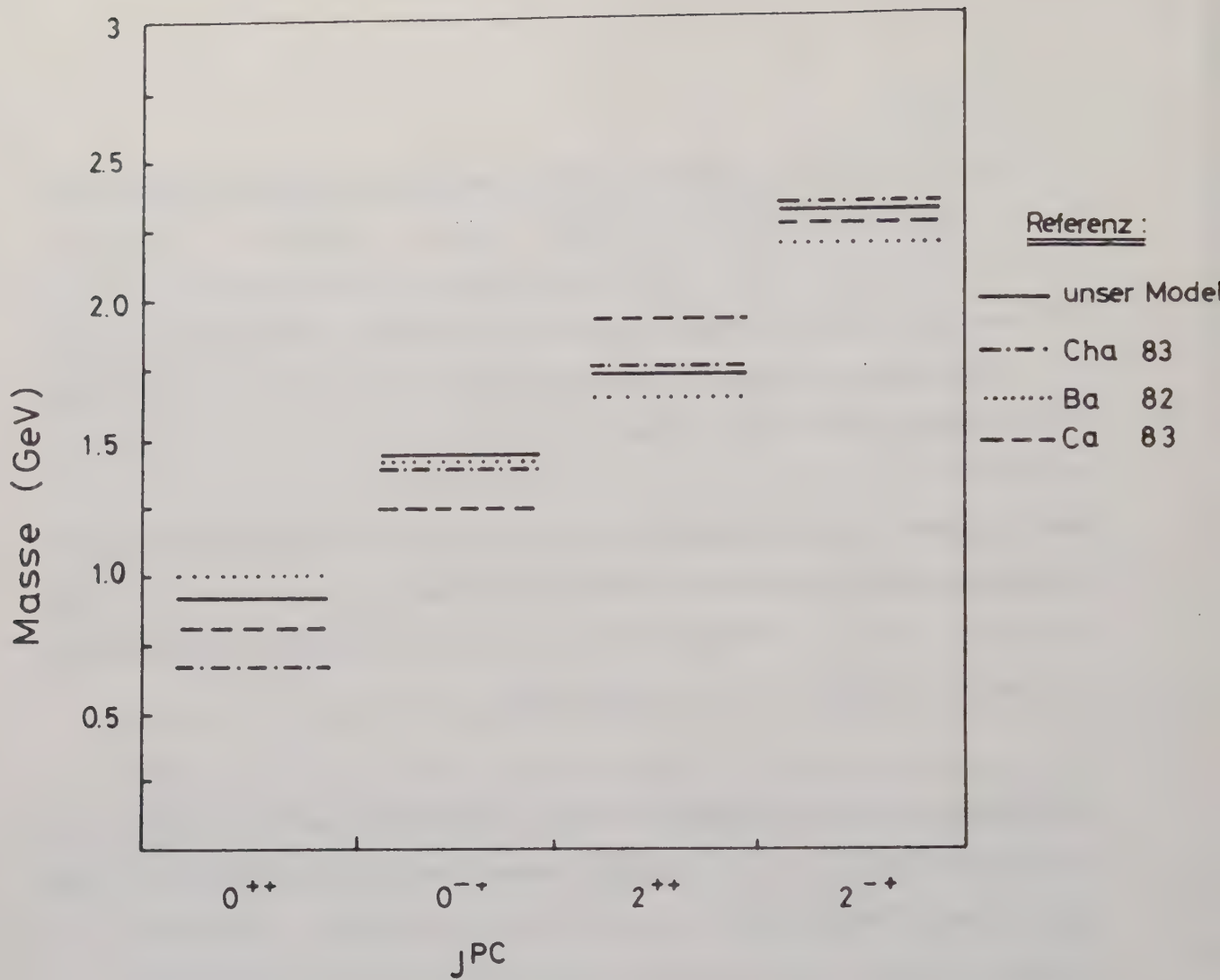
von Quasi-Teilchen in Form von 0^{++} -Glueballs anzusehen und physikalische Glueballs als Anregungen auf diesem Vakuum zu interpretieren. Aus diesem Modell für das Vakuum bestimmen die Autoren die Bag Konstante $B^{1/4}$. Die weiteren Parameter sind analog zu unserem Modell, nämlich ein Skalenparameter Λ sowie die Gluon-Selbstenergie Parameter $\epsilon_S^{(TE)}$, $\epsilon_S^{(TM)}$ wobei die ad hoc Annahme $\epsilon_S^{(TE)} = \epsilon_S^{(TM)}$ gemacht wird.

Im Gegensatz zu unserem Modell berücksichtigt keinen der genannten Arbeiten den Einfluß angeregter Zustände und Konfigurationsmischungen verschiedener virtueller Anregungen, welche die Wechselwirkung der Gluonen maßgeblich beeinflußt (wie in Abschnitt 6.2.5 aufgezeigt und erläutert wird).

In Figur 6.6 sind die Vorhersagen für das gg -Glueball Spektrum der obigen Ansätze (Cha 83), (Ba 82) und (Ca 83) sowie unsere Resultate (aus Tabelle 6.5 für den Fall b)) gegenübergestellt.

Figur 6.6 : (nachfolgende Seite)

Vergleich der Resultate für das Spektrum der niedrigst liegenden Glueballs mit angegebenen Quantenzahlen J^{PC} aus verschiedenen Bag Modell Ansätzen (Erläuterungen im Text).



Trotz der oben erläuterten signifikanten Unterschiede der vier Bag Modell Ansätze sind die qualitativen Aussagen der Ergebnisse dieselben :

Offensichtlich besteht generelle Übereinstimmung darin, daß der niedrigst liegende Glueball der 0^{++} -Zustand mit einer Masse $\leq 1 \text{ GeV}$ ist und die Struktur des Spektrums mit zunehmender Masse wie folgt aussieht :

$$\begin{aligned}
& M(0^{++}) \approx 0.7 - 1 \text{ GeV} \\
< & M(0^{-+}) \approx 1.2 - 1.5 \text{ GeV} \\
< & M(2^{++}) \approx 1.6 - 1.9 \text{ GeV} \\
< & M(2^{-+}) \approx 2.1 - 2.3 \text{ GeV}
\end{aligned}$$

Dieser Vergleich zeigt, daß die Vorhersagen relativ unabhängig von den verschiedenen Modell Annahmen sind und unterstreicht die Aussagekraft der Resultate.

Ein weiterer Pluspunkt für die Glaubwürdigkeit der obigen Bag Modell Rechnungen ist die qualitative Übereinstimmung mit vergleichbaren Ergebnissen aus Gitterrechnungen zum Glueball Spektrum (vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.3 und Figur 2.2).

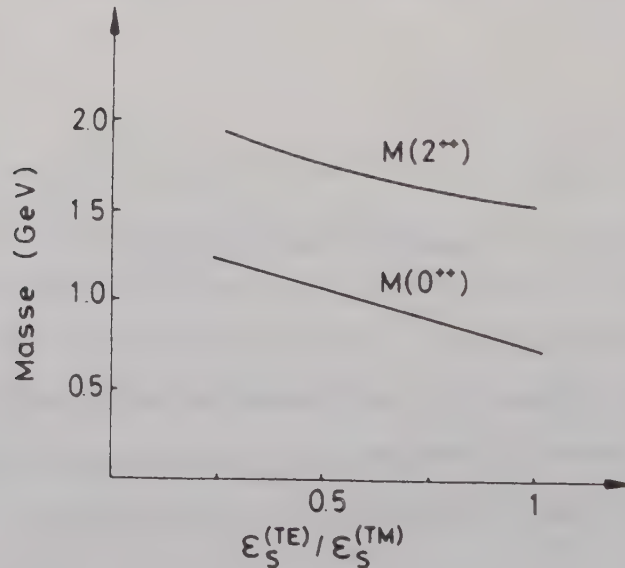
Schließlich ist noch zu bemerken, daß Glueballs mit drei oder mehr Valenz-Gluonen wahrscheinlich deutlich schwerer als 2 GeV sind, so daß der phänomenologisch interessante Massenbereich $0.5 \text{ GeV} - 2.5 \text{ GeV}$ in der Tat durch die $J = 0$ und $J = 2$ gg -Glueballs (mit 2 Valenz-Gluonen) bestimmt wird.

6.2.5 Analyse der numerischen Resultate

Um unsere Ergebnisse für das Glueball Spektrum näher zu verstehen und insbesondere die Ursache für die starke Massenaufspaltung der einzelnen Zustände herauszukristallisieren, sind die folgenden Erläuterungen lehrreich.

(i) Die Auswirkung der Gluon-Selbstenergie Beiträge :

Ebenso wie im Fall der Quarks (Abschnitt 6.1) erhalten wir für die Selbstenergie Parameter der Gluonen $\epsilon_S^{(TE)}$ bzw. $\epsilon_S^{(TM)}$ recht große *negative* Werte, die durch Anpassung an die Masse des $\iota(1440)$ der Bedingung $\epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)} = -1.245$ genügen. Im allgemeinen wird $\epsilon_S^{(TE)} \neq \epsilon_S^{(TM)}$ sein; das Verhältnis ist durch unseren Fit nicht festgelegt. Wir haben die Auswirkung der Variation von $\epsilon_S^{(TE)}/\epsilon_S^{(TM)}$ auf das Massenspektrum für einen breiten Bereich getestet. Zur Orientierung dient das Verhältnis der (ungestörten) Einteilchen-Energie der TE - und TM -Gluonen im Bag $\epsilon_0^{(TE)}/\epsilon_0^{(TM)} \approx 0.62$. Intuitiv würde man vermuten, daß sich die Selbstenergien (die ja die Einteilchen-Energien modifizieren) ein ähnliches Verhältnis bilden. Es ist daher bemerkenswert, daß unsere berechneten Glueball Massen für $\epsilon_S^{(TE)}/\epsilon_S^{(TM)} = 2/3$ am besten mit den experimentellen Kandidaten übereinstimmen (vgl. Tabelle 6.5 und Figur 6.5). Die folgende Figur 6.7 verdeutlicht den Einfluß der Änderung von $\epsilon_S^{(TE)}/\epsilon_S^{(TM)}$ auf die Massen der 0^{++} - und 2^{++} -Glueballs. (Die Massen der $(TE)(TM)$ -Glueballs, d.h. der 0^{-+} - und 2^{-+} -Glueballs sind von diesem Verhältnis unabhängig!)



Figur 6.7 : Einfluß des Verhältnisses der Selbstenergie Parameter für TE - und TM -Gluonen, $\epsilon_S^{(TE)}/\epsilon_S^{(TM)}$, auf die Massen der 0^{++} und 2^{++} Glueball-Zustände (bei fixiertem $\epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)} = -1.245$).

Unabhängig von dem Verhältnis $\epsilon_S^{(TE)}/\epsilon_S^{(TM)}$ entspricht der festgelegte Wert für $\epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)} = -1.245$ einer *effektiven Selbstenergie eines (TE)(TM) -Gluon Paares* von

$$\Delta E_S^{(TE)(TM)} = \frac{\alpha_S(R_0)}{R_0} \cdot (\epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)}) \approx -\frac{1.18}{R_0} \approx -0.37 \text{ GeV}$$

für mittleres $\alpha_S(R_0) \approx 0.95$ und $R_0 \approx 3.2 \text{ GeV}^{-1}$ (nach Tabelle 6.5). Im Vergleich dazu beträgt die *kinetische Energie eines (TE)(TM) -Gluon Paares* im niedrigsten (ungestörten) Bag Eigenzustand

$$E_0^{(TE)(TM)} = \frac{\omega^{(TE)} + \omega^{(TM)}}{R_0} \approx \frac{7.23}{R_0}$$

Das heißt, die Selbstenergie Beiträge der Gluonen fallen gegenüber den Einteilchen-Energien nicht so stark ins Gewicht wie im Fall der Quarks (vgl. Abschnitt 6.1.4 (v)). Nichtsdestotrotz macht die effektive Selbstenergie ΔE_S im Vergleich zur kinetischen Energie betragsmäßig 15 – 20 % aus und gibt einen wesentlichen Beitrag zur Energieverschiebung (Zur Erinnerung: für die Quarks erhielten wir eine Selbstenergie, die bis zu 45 % gegenüber den Einteilchen-Energien betrug).

Es ist allerdings noch einmal klar herauszustellen, daß $\epsilon_S^{(TE)}$, $\epsilon_S^{(TM)}$ effektive Parameter sind, deren Wert natürlich von den spezifischen Modellannahmen abhängt, die sich in unserem Parametersatz widerspiegeln. Eine andere Parametrisierung des Bag Modells würde i.a. auch verschiedene Werte für die Selbstenergie Parameter ergeben (vgl. Cha 83, Ca 83).

Im übrigen gilt für $\epsilon_S^{(TE)}$, $\epsilon_S^{(TM)}$ all das, was in Abschnitt 6.1.4 (v) zu dem entsprechenden Quark-Selbstenergie Parameter $\epsilon_S^{(q)}$ bemerkt wurde.

(ii) Die Bag Radien R_0 und die Werte für $\alpha_S(R_0)$:

Die Bag Radien der Glueballs aus Tabelle 6.5 liegen bei $R_0 \approx 3.12 - 3.36 \text{ GeV}^{-1}$. Vergleicht man diese Werte mit den Radien der Hadronen in Tabelle 6.1, so erkennt man, daß die gg -Glueballs etwas größer sind als die $q\bar{q}$ -Mesonen. Das hängt damit zusammen, daß aufgrund der größeren kinetischen Energie und der stärkeren Wechselwirkung der zwei Gluonen die innere Gesamtenergie des Bags größer ist als für die verwandten $q\bar{q}$ -Systeme (vgl. folgende Diskussion unter (iii)). Diese Eigenschaft führt konsequenterweise zu einer größeren Ausdehnung des Bags.

Die Werte für $\alpha_S(R_0) \approx 0.90 - 0.98$ sind dementsprechend ebenfalls größer als bei den Mesonen, da $\alpha_S(R_0)$ als gleitende Kopplungskonstante durch die Bagradien R_0 bestimmt wird. Nichtsdestotrotz ist α_S deutlich kleiner als in früheren Bag Modell Rechnungen (vgl. Abschnitt 6.1.4 (iv)). Zudem ist zu beachten, daß für die Störungsentwicklung im Bag Modell nicht α_S sondern α_S/R der effektive (dimensionsbehaftete) Entwicklungsparameter ist. Letztere Größe ist aber mit $\alpha_S/R_0 \approx 0.3 \text{ GeV}$ deutlich kleiner als 1. Obwohl wir keine definitive Aussage über die Konvergenz der Störungsreihe machen können ohne die Beiträge höherer Ordnungen explizit berechnet zu haben, ist solch ein relativ kleiner Wert für α_S ein befriedigendes Ergebnis.

In diesem Zusammenhang ist interessant zu bemerken, daß (Ba 82) und (Ca 83) in ihren Bag-Modell Ansätzen (vgl. Abschnitt 6.2.3) ein $\alpha_S \simeq 0.75$ bzw. $\alpha_S \simeq 0.9 - 1.1$ finden. Außerdem ergibt, zum Vergleich, eine Potential Modell Studie von gg -Glueballs (Ba 81 b) einen Wert $\alpha_S \simeq 0.6$.

(iii) Die Stärke der gg -Wechselwirkung im Vergleich zur $q\bar{q}$ -Wechselwirkung

Wie wir festgestellt haben, ist die Aufspaltung der Glueball Zustände mit unterschiedlichem Drehimpuls J wesentlich größer als bei den Hadronen (vgl. Abschnitt 6.2.2). Dies ist eine Folge der stärkeren *Spin-Spin Wechselwirkung* und *farbelektromagnetischen Wechselwirkung* der Gluonen untereinander und wird durch die folgende Betrachtung einsichtig.

Die Wechselwirkung zweier Gluonen bzw. eines Quark-Antiquark Paares in 1. Ordnung Störungstheorie ($\sim O(\alpha_S)$) wird durch die Matrixelemente

$$\langle g_1 g_2 | \text{ [Three diagrams: s-channel, t-channel, u-channel exchange] } | g_1 g_2 \rangle \quad (6.8a)$$

$$\langle q \bar{q} | \text{ [Two diagrams: s-channel, t-channel exchange] } | q \bar{q} \rangle \quad (6.8b)$$

bestimmt (vgl. (5.10c), (5.10a)), wobei die Vernichtungs-Diagramme (zweiter Summand) für Color-Singletts keinen Beitrag geben.

Diese Matrixelemente lassen sich auf die folgende Gestalt bringen (vgl. Anhang C):

$$V(gg) = C_{gg} \cdot \frac{\alpha_S}{R} \cdot \sum_{j_x=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} &\mu^{EX}(j_x) \cdot \mathcal{W}^{EX}(j_x) \\ &+ \mu^{AN}(j_x) \cdot \mathcal{W}^{AN}(j_x) \\ &+ \mu^{PV}(j_x) \cdot \mathcal{W}^{PV}(j_x) \end{aligned} \right]_{gg} \quad (6.9a)$$

$$V(q\bar{q}) = C_{q\bar{q}} \cdot \frac{\alpha_S}{R} \cdot \sum_{j_x=0}^{\infty} \left[\mu^{EX}(j_x) \cdot \mathcal{W}^{EX}(j_x) + \mu^{AN}(j_x) \cdot \mathcal{W}^{AN}(j_x) \right]_{q\bar{q}} \quad (6.9b)$$

Dabei erstreckt sich die Summation über die mit der Drehimpulserhaltung verträglichen Kopplung der beiden Gluonen bzw. Quarks an den Vertizes zu einem Drehimpuls j_x . (z.B.: für zwei TE -Gluonen mit $J^{TE} = 1$ ist $j_x = 0, 1, 2$ und für ein $S_{1/2}$ -Quark (bzw. Antiquark) mit $J^{\bar{q}} = 1/2$ ist $j_x = 0, 1$).

Die Summanden in (6.9a), (6.9b) faktorisieren jeweils in einen 'radialen Anteil $\mu(j_x)$ ' und einen 'geometrischen Anteil $\mathcal{W}(j_x)$ ', wobei μ^{EX} dem *1-Gluon Austausch Diagramm*, μ^{AN} der *Paarvernichtung* und, in (6.8), μ^{PV} dem *4-Gluon Punktvertex* entsprechen. Da wir nur Color-Singletts untersuchen, verschwinden die Annihilationsbeiträge $\mu^{AN} \cdot \mathcal{W}^{AN}$ und wir betrachten sie nicht weiter.

Die Konstanten C_{gg} bzw. $C_{q\bar{q}}$ schließlich sind Color-Faktoren, die aus der Farbkopplung der Gluonen bzw. des Quark-Antiquark Paares resultieren. Für Color-Singletts ist $C_{gg} = -3$ und $C_{q\bar{q}} = -4/3$. Die explizite Berechnung dieser Color-Faktoren ist in Anhang D ausgeführt.

In den folgenden Tabellen 6.6 und 6.7 sind die Beiträge der einzelnen Terme in Gl.(6.9a) bzw. (6.9b) zu den Wechselwirkungs-Amplituden $V(gg)$ bzw. $V(q\bar{q})$ gegenübergestellt und zwar im Fall der gg -Wechselwirkung für zwei TE -Gluonen mit Drehimpuls (Spin) $J_{TE} = 1$ und im Fall der $q\bar{q}$ -Wechselwirkung für Quark und Antiquark jeweils im $S_{1/2}$ -Zustand. Die Notation μ_{ij} für die radialen Anteile von $V(gg)$, $V(q\bar{q})$ bedeutet, daß eines der beiden Teilchen in der radialen Bag Eigenmode i und das andere in der Eigenmode j sitzt.

Um die Bedeutung der verschiedenen virtuellen Gluon-Zustände in der Eigenmoden-

Entwicklung des Gluon-Propagators hervorzuheben, haben wir die Amplituden für den 1-Gluon Austausch, $\mu^{EX}(j_x)$, in eine Summe über die einzelnen Beiträge der ausgetauschten Gluonen entsprechend ihrer Polarisation $\sigma_x = S, L, TE, TM$ und ihrer radialen Quantenzahl $N_x = 1, 2, \dots, 5$ mit zugehöriger Eigenmode $\omega_{N_x}^{\sigma_x}$, zerlegt :

$$\mu^{EX}(j_x) \equiv \sum_{\sigma_x, N_x} \mu^{EX}(\omega_{N_x}^{\sigma_x}, j_x) \quad (6.10)$$

Tabelle 6.6 zeigt die Zusammensetzung der radialen Amplituden $\mu_{ij}^{EX}(q\bar{q})$, $\mu_{ij}^{EX}(gg)$ und $\mu_{ij}^{PV}(gg)$ für die Fälle, daß sich die wechselwirkenden Quarks bzw. Gluonen in den radialen Bag-Eigenmoden $(i, j) = (1, 1), (1, 2)$ bzw. $(2, 2)$, befinden. Die *1-Gluon Austausch Amplituden* μ^{EX} sind entsprechend Gl.(6.10) noch einmal aufgegliedert in die einzelnen Beiträge der ausgetauschten Gluonen mit Eigenmode $\omega_{N_x}^{\sigma_x}$.

Tabelle 6.7 listet die verschiedenen Terme und Faktoren der gesamten Wechselwirkungs-Amplituden $V(q\bar{q})$, Gl.(6.9b), und $V(gg)$, Gl.(6.9a), und zwar jeweils für die physikalisch möglichen Kopplungen von $q\bar{q}$ bzw. gg zu bestimmtem Gesamtdrehimpuls J , Parität P und Ladungspartität C (im Fall des $q\bar{q}$ -Systems für $J^{PC} = 0^{-+}, 1^{-+}$ und im Fall des gg -Systems für $J^{PC} = 0^{++}, 2^{++}$).

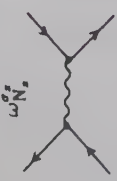
Diagramm	Gluon - Mode $\omega_{N_s}^a$	$j_z = 0 \quad (\sigma_z = S)$			$j_z = 1 \quad (\sigma_z = TE)$			$j_z = 2 \quad (\sigma_z = S)$		
		μ_{11}	μ_{12}	μ_{22}	μ_{11}	μ_{12}	μ_{22}	μ_{11}	μ_{12}	μ_{22}
 $\omega_{N_s}^a$ $\mu_{ij}^{EX}(qq)$	1	$+0.961 \cdot 10^{-2}$	$+0.449 \cdot 10^{-1}$	$+0.210$	-0.1767	$-0.699 \cdot 10^{-1}$	$-0.277 \cdot 10^{-1}$			
	2	$+0.184 \cdot 10^{-3}$	$-0.184 \cdot 10^{-2}$	$+0.185 \cdot 10^{-1}$	$-0.321 \cdot 10^{-3}$	$-0.324 \cdot 10^{-2}$	$-0.326 \cdot 10^{-1}$			
	3	$+0.20 \cdot 10^{-4}$	$+0.58 \cdot 10^{-4}$	$+0.16 \cdot 10^{-3}$	$-0.12 \cdot 10^{-4}$	$+0.55 \cdot 10^{-3}$	$-0.244 \cdot 10^{-1}$			
	4	$+0.42 \cdot 10^{-5}$	$+0.43 \cdot 10^{-5}$	$+0.43 \cdot 10^{-5}$	$-0.17 \cdot 10^{-5}$	$-0.11 \cdot 10^{-4}$	$-0.65 \cdot 10^{-4}$			
	5	$+0.12 \cdot 10^{-5}$	$+0.98 \cdot 10^{-6}$	$+0.78 \cdot 10^{-6}$	$-0.41 \cdot 10^{-6}$	$-0.88 \cdot 10^{-6}$	$-0.19 \cdot 10^{-5}$			
	Total	$+0.982 \cdot 10^{-2}$	$+0.431 \cdot 10^{-2}$	$+0.2283$	-1.770	$-0.726 \cdot 10^{-1}$	$-0.848 \cdot 10^{-1}$			
 $\omega_{N_s}^a$ $\mu_{ij}^{EX}(gg)$	1	$-0.501 \cdot 10^{-2}$	$+0.357 \cdot 10^{-1}$	-0.2537	-0.3370	-0.1870	-0.1040	$-0.404 \cdot 10^{-1}$	$-0.272 \cdot 10^{-1}$	$-0.183 \cdot 10^{-1}$
	2	$-0.82 \cdot 10^{-3}$	$+0.176 \cdot 10^{-2}$	$-0.389 \cdot 10^{-2}$	$-0.275 \cdot 10^{-2}$	$-0.140 \cdot 10^{-1}$	$-0.711 \cdot 10^{-1}$	$-0.25 \cdot 10^{-3}$	$-0.143 \cdot 10^{-2}$	$-0.816 \cdot 10^{-2}$
	3	$-0.69 \cdot 10^{-4}$	$+0.110 \cdot 10^{-2}$	$-0.158 \cdot 10^{-1}$	$-0.72 \cdot 10^{-4}$	$+0.120 \cdot 10^{-2}$	$-0.197 \cdot 10^{-1}$	$-0.11 \cdot 10^{-4}$	$+0.223 \cdot 10^{-3}$	$-0.473 \cdot 10^{-2}$
	4	$-0.13 \cdot 10^{-4}$	$-0.43 \cdot 10^{-4}$	$-0.13 \cdot 10^{-4}$	$-0.95 \cdot 10^{-5}$	$-0.39 \cdot 10^{-4}$	$-0.16 \cdot 10^{-3}$	$-0.17 \cdot 10^{-5}$	$-0.67 \cdot 10^{-5}$	$-0.25 \cdot 10^{-4}$
	5	$-0.38 \cdot 10^{-5}$	$-0.57 \cdot 10^{-5}$	$-0.87 \cdot 10^{-5}$	$-0.22 \cdot 10^{-5}$	$-0.24 \cdot 10^{-5}$	$-0.26 \cdot 10^{-5}$	$-0.45 \cdot 10^{-6}$	$-0.72 \cdot 10^{-6}$	$-0.12 \cdot 10^{-5}$
	Total	$-0.591 \cdot 10^{-2}$	$+0.384 \cdot 10^{-1}$	-0.2736	-0.3398	-0.1997	-0.1946	$-0.407 \cdot 10^{-1}$	$-0.284 \cdot 10^{-1}$	$-0.312 \cdot 10^{-1}$
 $\mu_{ij}^{PV}(gg)$		-0.1549	$-0.530 \cdot 10^{-1}$	$-0.786 \cdot 10^{-1}$	0	0	0	$-0.1549 \cdot 10^{-1}$	$-0.0530 \cdot 10^{-1}$	$-0.0786 \cdot 10^{-1}$

Tabelle 6.6 :

Die 'radialen Wechselwirkungs-Amplituden' $\mu_{ij}^{EX}(q\bar{q})$, $\mu_{ij}^{EX}(gg)$ und $\mu_{ij}^{PV}(gg)$ in den Matrixelementen $V(q\bar{q})$, Gl.(6.9b), und $V(gg)$, Gl.(6.9a), und zwar für die Fälle

$q\bar{q}$: Quark bzw. Antiquark im $i S_{1/2}$ bzw. $j S_{1/2}$ Zustand;

gg : Zwei Gluonen im $(TE)_i$ bzw. $(TE)_j$ Zustand

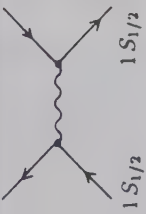
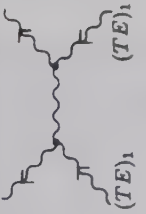
Diagramm	J^{PC}	$j_z = 0$		$j_z = 1$		$j_z = 2$		C_{color}	TOTAL
		$\mu_{11}(0)$	$\mathcal{W}(0)$	$\mu_{11}(1)$	$\mathcal{W}(1)$	$\mu_{11}(2)$	$\mathcal{W}(2)$		
	0^{-+} $1^{- -}$	$+0.982 \cdot 10^{-2}$	1 1	-0.1770	-3 1	-	-	- $\frac{4}{3}$	-0.7211 +0.2229
	0^{++} 2^{++}	$-0.5917 \cdot 10^{-2}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$	-0.3398	-2 1	$-0.4067 \cdot 10^{-1}$	$\frac{10}{3}$ $\frac{1}{3}$	-3	-2.4575 +0.9670
	0^{++} 2^{++}	-0.1549	$-\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$	0	-2 1	-0.01549	$\frac{10}{3}$ $-\frac{8}{3}$	-3	+0.4646 -0.2323
Σ	0^{++} 2^{++}								-1.9829 +0.7347

Tabelle 6.7 :

Zusammensetzung der gesamten Wechselwirkungs-Amplituden $V(q\bar{q})$, Gl.(6.9b), und $V(gg)$, Gl.(6.9a), in 1. Ordnung Störungstheorie ($\sim O(\alpha_s)$), jeweils für die physikalisch möglichen Kopplungen von $q\bar{q}$ bzw. gg zu bestimmtem J^{PC} (nähere Erläuterungen im Text).

Aus dieser Gegenüberstellung wird ersichtlich, warum die Wechselwirkung zweier Gluonen deutlich stärker als die eines vergleichbaren $q\bar{q}$ -Paares ist :

1. Sowohl die 'Color Faktoren' C_{color} wie auch die 'Spin-Spin Faktoren' $\mathcal{W}(j_x)$ fallen für das gg -System stärker ins Gewicht als für das $q\bar{q}$ -System.
2. Die radialen Amplituden $\mu^{EX}(j_x)$ für das *1-Gluon Austausch* Diagramm sind für die gg -Wechselwirkung größer als für die entsprechende $q\bar{q}$ -Wechselwirkung.
3. Für die gg -Wechselwirkung gibt es einen wesentlichen Beitrag durch den *4-Gluon Punktvertex*, der in der $q\bar{q}$ -Wechselwirkung keine Entsprechung hat.

Schließlich macht die Auffächerung der *1-Gluon Austausch* Amplituden μ^{EX} in die Beiträge der verschiedenen Zustände des ausgetauschten Gluons (Tabelle 6.6) deutlich, daß die Eigenmoden-Entwicklung des Gluon-Propagators zwar schnell konvergiert, jedoch die höheren Anregungen des virtuellen Gluons besonders für μ_{12} und μ_{22} nicht vernachlässigbare Beiträge liefern.

(iv) Einfluß von Konfigurationsmischungen via Diagonalisierung des Hamiltonoperators, angeregte Zustände

Die Berechnung des Massenspektrums der Glueballs (wie auch der Hadronen in Abschnitt 6.1) beinhaltet in unserem Modell als wesentlichen Zug die Berücksichtigung virtueller Teilchen-Anregungen (Konfigurationsmischungen), die über die Diagonalisierung der Matrix (5.17) bzw. (5.25), in die die Wechselwirkungs-Amplituden (5.10) für verschiedene Konfigurationen der Gluonen (bzw. Quarks) eingehen.

Mit anderen Worten, die Glueball-Zustände aus Tabelle 6.5 sind *Überlagerungen des Grundzustandes und mehrerer Anregungszustände* der zwei Gluonen im Bag, d.h. (vgl. Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1):

$$|gg\rangle^{(J^{PC})} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \quad (6.11)$$

wobei

$$|\alpha\rangle = \left[\hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ \right]_{\alpha}^{(J^{PC}, \text{Color-Singlett})} |O\rangle \quad (6.12)$$

die ungestörten Bag Eigenzustände zweier Gluonen und der Index α für eine bestimmte Kombination der Quantenzahlen

$$\begin{aligned} N_i &= 1, \dots, 5 && \text{radiale Quantenzahl} \\ j_i &= 1, 2 && \text{Drehimpuls} \\ \sigma_i &= TE, TM && \text{Polarisation} \end{aligned} \quad (6.13)$$

der beiden Gluonen $i = 1, 2$ steht.

Die Koeffizienten c_{α} beschreiben die Beimischungen der verschiedenen Konfigurationen $|\alpha\rangle$ im physikalischen Zustand $|gg\rangle$ und ergeben sich wie gesagt aus der Diagonalisierung der Matrix (5.10c)

$$\langle \beta | \left[\begin{array}{c} \text{diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \text{diagram 7} \\ \cdot (1 \leftrightarrow 2) \end{array} \right] \right] | \alpha \rangle \quad (6.14)$$

(vgl. Kapitel 5, Abschnitt 5.2.1(ii))

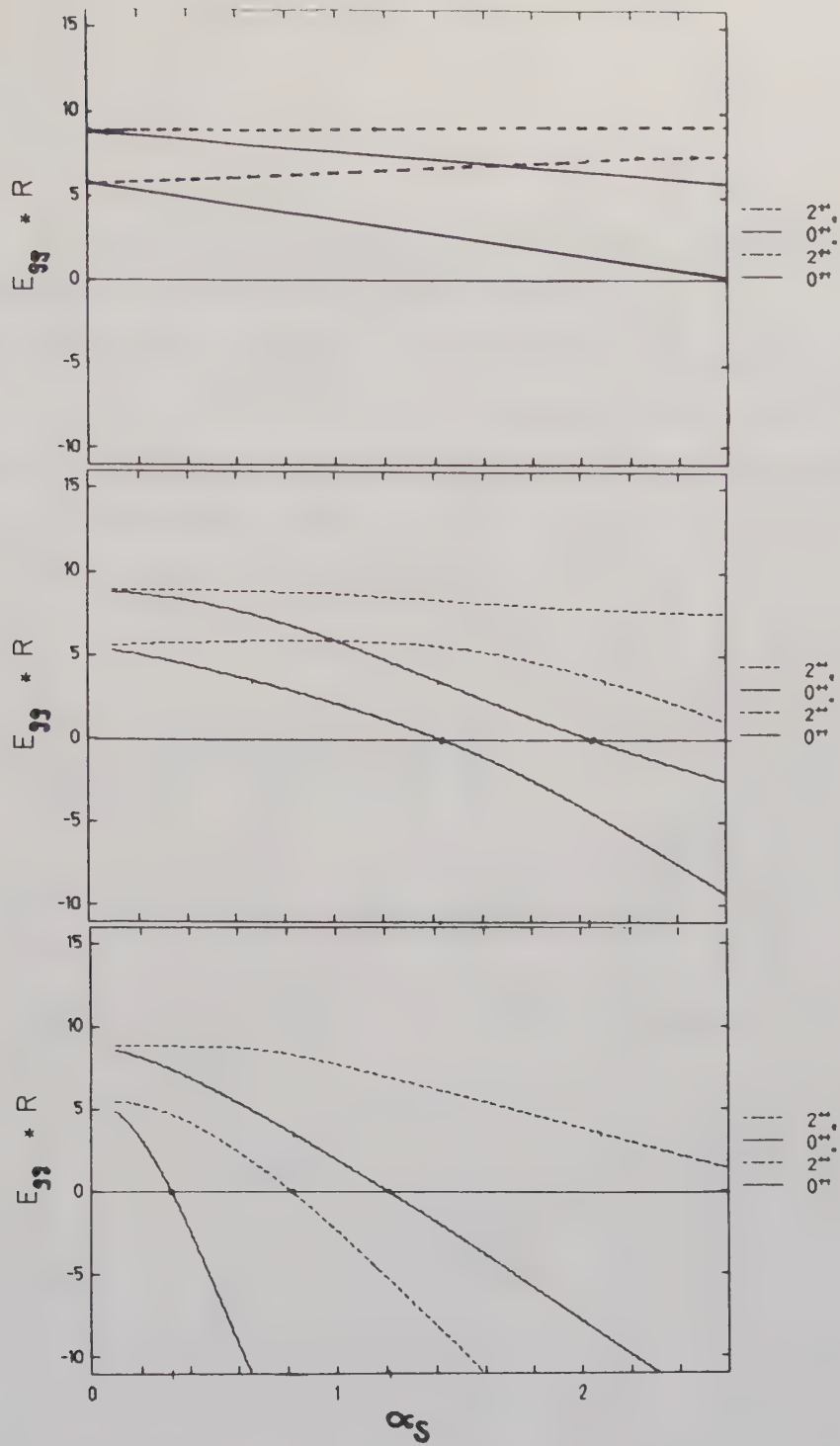
Im Gegensatz zum analogen Fall für die $q\bar{q}$ - bzw. qqq -Systeme entsprechend (5.10a) bzw. (5.10b), für die die Beimischung höherer Anregungen in den Grundzuständen

gering ist, zeigt sich für die Glueballs eine massive *Auswirkung der Diagonalisierungs-prozedur*: Dies ist eine Folge der stärkeren 'Spin-Spin Kopplung' und der größeren 'Farb-Wechselwirkung' der zwei Gluonen (vgl. vorangegangene Diskussion im Punkt (iii), die sich in relativ großen außerdiagonalen Wechselwirkungs-Amplituden der Matrix (6.14) niederschlägt.

Die folgenden Bilder, Figur 6.8 und 6.9, illustrieren den *Einfluß der Beimischungen von angeregten Zuständen* am Beispiel der Wechselwirkung zweier TE -Gluonen. Dargestellt ist die dimensionslose Größe $E_{gg} \cdot R$ als Funktion der Kopplungsstärke α_S , wobei $E_{gg} \equiv E_0 + \Delta E$ die Summe aus kinetischer Energie E_0 und der Energieverschiebung ΔE ($\sim \alpha_S$) durch die Wechselwirkung des gg -Paares ist.

Zum Vergleich zeigen wir die Aufspaltung der einzelnen Niveaus einmal *ohne* und einmal *mit* Berücksichtigung von Konfigurationsmischungen (d.h. Diagonalisierung der Matrix (6.14)!).

Figur 6.8 verdeutlicht die Aufhebung der Entartung für die $0^{++}/2^{++}$ -Zustände durch Aufdrehen der Kopplungsstärke α_S . Figur 6.9 zeigt zusätzlich das Verhalten der niedrigsten angeregten Niveaus.

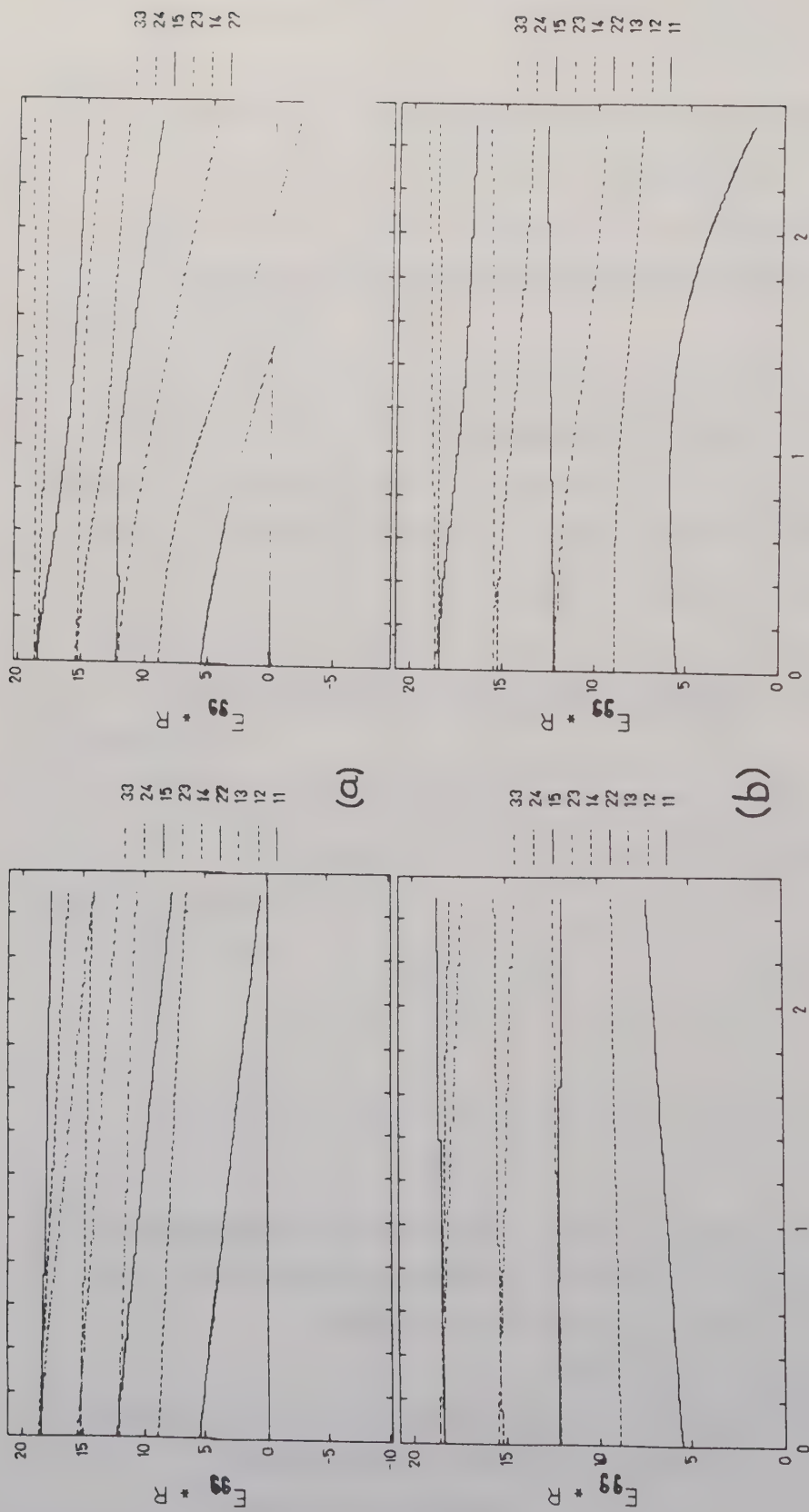


Figur 6.8 :

Einfluß der Diagonalisierungs-Prozedur am Beispiel zweier wechselwirkender (TE)-Gluonen. Gezeigt ist die Aufhebung der Entartung zwischen den 0^{++} - und 2^{++} -Zuständen für den Grundzustand und die erste Anregung

- a) ohne Diagonalisierung
- b) mit Diagonalisierung (Beimischung höherer radialer Anregungen)
- c) mit Diagonalisierung (Beimischung höherer radialer
und Drehimpulsanregungen)

Dargestellt ist jeweils die dimensionslose Größe $E_{gg} \cdot R$ mit $E_{gg} = E_0 + \Delta E$ als Funktion der Kopplungsstärke α_S .

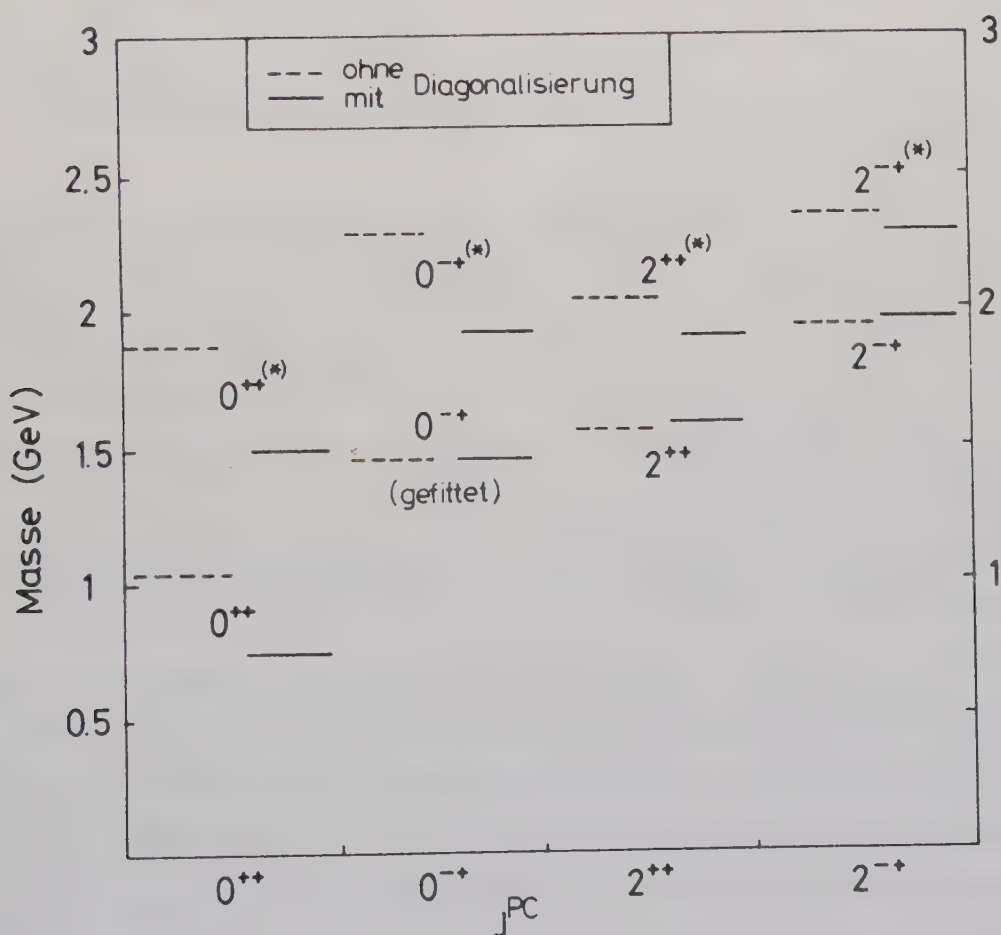


Figur 6.9 :

Auswirkung der Diagonalisierungs-Prozedur auf die höheren Niveaus für Zustände (a) und für die 2^{++} -Zustände (b), links ohne und rechts mit Diagonalisierung. Die einzelnen Niveaulinien entsprechen jeweils $(TE)(TE)$ -Zuständen, für die eines der beiden Gluonen in der radialen Eigenmode i und das andere in der Eigenmode j sitzt, gekennzeichnet durch die nebenstehenden Zahlen i, j .

Aus dieser Analyse wird ersichtlich, daß insbesondere die niedrigsten Zustände durch die Diagonalisierung betroffen sind und stark verschoben werden.

Dieser Effekt schlägt sich erwartungsgemäß auch signifikant auf das Massenspektrum der Glueball-Zustände nieder. Die *Auswirkung der Diagonalisierungs-Prozedur auf das Glueball Spektrum* ist in Figur 6.10 dargestellt, in der die Ergebnisse für die Glueball Massen (vgl. Abschnitt 6.2.2) einmal *ohne* und einmal *mit* Diagonalisierung des Bag Hamiltonoperators nebeneinandergestellt sind.



Figur 6.10 : Auswirkung der Diagonalisierungs-Prozedur auf das Glueball Spektrum. Die Massen wurden entsprechend Abschnitt 6.2.1 einmal ohne (- -) und einmal mit (—) Diagonalisierung des gg -Hamiltonoperators berechnet. Der 0^{-+} -Zustand ist beide Male auf die Masse des ι -Teilchens $M_{\iota} = 1.440 \text{ GeV}$ festgesetzt.

7 $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischung, Zerfälle und Produktion von Glueballs

In Kapitel 2 haben wir einen Überblick über den derzeitigen Stand der 'Glueball-Forschung' gegeben und die Problematik einer definitiven Identifikation von Glueballs erläutert. Die experimentelle Suche nach Glueball-Zuständen im Mesonspektrum wird vor allem dadurch erschwert, daß es bislang keine offensichtlichen, eindeutigen Signaturen für diese Teilchen gibt.

Zum einen tragen die niedrig liegenden Glueballs Quantenzahlen J^{PC} , die auch bei den $q\bar{q}$ -Mesonen auftreten, und zudem liegen ihre Massen im selben Bereich ($\approx 0.8 - 2$ GeV), wie die von gewöhnlichen Mesonen (vgl. Abschnitt 6.2.1). Daher erlaubt eine allein auf die Quantenzahlkombinationen und die Massen bauende Interpretation experimenteller Daten keine klare Unterscheidung zwischen Glueballs, $q\bar{q}$ -Mesonen oder gar $q\bar{q}q\bar{q}$ -Quarkmolekülen.

Zum anderen wird vermutet, daß aufgrund ihrer Verwandtschaft Quark-Zustände und Glueballs mischen, d.h. Glueballs existieren wahrscheinlich nicht in Reinform, sondern sind i.a. komplexere Überlagerungen gluonischer und quarkonischer Anteile.

Das naive Bild von Glueballs bzw. Mesonen als rein gluonische bzw. rein quarkonische Zustände, welches wir den Berechnungen der Massenspektren in Kap.6, Abschnitte 6.1, 6.2, zugrunde gelegt haben, ist eine theoretische Idealisierung, die i.a. nicht besonders realistisch ist. Vielmehr erscheint es sinnvoll, folgende, allgemeinere Definitionen einzuführen:

- Glueballs sehen wir als Zustände mit überwiegenden gluonischen Anteilen und gegebenenfalls geringfügigen quarkonischen Beimischungen an.
- 'Quark-Mesonen' identifizieren wir als Objekte, die in erster Linie aus $q\bar{q}$ -Konfigurationen bestehen, die jedoch daneben auch gluonische Komponenten enthalten können.

Ein illustratives Beispiel ist das $\iota(1440)$ -Teilchen, das als hoffnungsvoller Kandidat für einen 0^{-+} -Glueball angesehen wird (Cl 88, Pa 87). Diese Hypothese gründet vor allem auf den Produktionsmechanismen und den Zerfallseigenschaften des ι , die einer Interpretation als konventionellem mesonischen Zustand widersprechen. Auf der anderen Seite wird das ι -Teilchen aber auch in typischen hadronischen Reaktionen beobachtet, woraus man schließt, daß es wahrscheinlich signifikante Quark-Beimischungen enthält. So deuten z.B. Daten aus Experimenten zur Hadron-Produktion von $E(1420)/\iota(1440)$ auf eine komplexe Struktur in der Massenregion 1400 - 1450 MeV hin (Pa 87, Chu 88), was als Überlagerung mehrerer Zustände mit geringfügig unterschiedlichen Massen und Zerfallseigenschaften interpretiert wird. Ähnlich ist die Situation bei den anderen Glueball Kandidaten $S_1(993)$, $\theta(1720)$, etc. (vgl. Diskussion der experimentellen Situation in Kap.6, Abschnitt 6.2.3).

Motiviert durch diese Aspekte werden wir im folgenden die Möglichkeit einer *Mischung der 0^{-+} -Mesonen $\eta(549)$ und $\eta'(958)$ mit dem 0^{-+} -Glueball-Kandidaten $\iota(1440)$* untersuchen, indem wir im Rahmen unseres Modells einen Mischungsansatz formulieren und damit die Anteile quarkonischer und gluonischer Komponenten in den physikalischen Zuständen η , η' und ι , sowie deren Anregungen berechnen.

Unsere Resultate sind mit derzeit verfügbaren experimentellen Daten verträglich und implizieren, daß das ι -Teilchen zu etwa 75% ein Glueball ist und das η' neben seinem

Quark-Gehalt nahezu 20% gluonische Beimischungen enthält, während das η nahezu ein reines $q\bar{q}$ -Meson ist.

Die Konsequenzen dieser Ergebnisse für die Zerfallseigenschaften von η , η' und ι , sowie ihre Produktionsraten in J/ψ -Zerfällen werden wir in den Abschnitten 7.2 und 7.3 analysieren und konkrete Vorhersagen treffen.

7.1 Modell der (η - η' - ι)-Mischung

7.1.1 Berechnung der Mischung zwischen η , η' , ι und deren angeregter Zustände

Zur Bestimmung der *Mischungskoeffizienten*, welche die Anteile der quarkonischen bzw. gluonischen Komponenten in den Wellenfunktionen von η , η' und ι beschreiben, gehen wir nach unserem bewährten Rezept vor :

Analog zu Analyse der Hadronen und Glueballs in Kap.6, Abschnitte 6.1, 6.2, wo wir Beimischungen höherer Anregungen berücksichtigt haben, berechnen wir die $q\bar{q}$ - gg Mischungen über die Diagonalisierung des effektiven Hamiltonoperators entsprechend Gl.(5.17) (vgl. Kap.5, Abschnitt 5.2.1(ii)). Die Erweiterung gegenüber den vorangegangenen Rechnungen besteht darin, daß wir nun zusätzlich die $q\bar{q}$ - gg Wechselwirkung in $O(\alpha_s)$ mitnehmen. Dazu konstruieren wir die Zustandsvektoren der physikalischen Teilchen, indem wir sie in eine *Basis von ungestörten $q\bar{q}$ - und gg - Bag Zuständen* entwickeln, und zwar verwenden wir folgende Basis :

$$\left. \begin{aligned} |N>_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} |u\bar{u} + d\bar{d}>_i \\ |S>_i &= |s\bar{s}>_i \\ |G>_i &= |g^{(TE)}g^{(TM)}>_i \end{aligned} \right\} \text{ mit } J^{PC} = 0^{-+} \quad (7.1)$$

Dabei bezeichnen $|N>$, $|S>$, bzw. $|G>$ die ungestörten Bag-Eigenzustände zweier *non-strange Quarks*, zweier *strange Quarks*, bzw. eines $(TE)(TM)$ *Gluon-Paares*, die jeweils zu $J^{PC} = 0^{-+}$ und zu einem Color Singlet gekoppelt sind. Sie genügen den 'Physikalitätsforderungen' (4.45)-(4.47) und werden entsprechend Kap.5, Abschnitt 5.2.1 konstruiert. Die Indizes $i=1,2,\dots,6$ bezeichnen den Grundzustand bzw. die ersten fünf radialen Anregungen der Zweiteilchen-Zustände $|N>$, $|S>$ und $|G>$.

Die *physikalischen Zustände*

$$|\Psi> \equiv |\eta>, |\eta^*>, \dots, |\eta'>, |\eta'^*>, \dots, |\iota>, |\iota^*>, \dots \quad (7.2)$$

sind bestimmte Linearkombinationen

$$|\Psi> = \sum_{i=1}^6 a_i^{(\Psi)} |N>_i + \sum_{i=1}^6 b_i^{(\Psi)} |S>_i + \sum_{i=1}^6 c_i^{(\Psi)} |G>_i \quad (7.3)$$

wobei die Koeffizienten a_i , b_i , bzw. c_i die Beimischung der non-strange, strange, bzw. gluonischen Zustände in der radialen Eigenmode i , Gl.(7.1), im physikalischen Zustand $|\Psi>$ angeben und der Normierungsbedingung

$$\sum_i \left[a_i^{(\Psi)^2} + b_i^{(\Psi)^2} + c_i^{(\Psi)^2} \right] = 1 \quad (7.4)$$

genügen müssen.

Die *Massenmatrix* für die *physikalischen Zustände* $|\Psi\rangle$ wird nun derart konstruiert, daß in den Diagonalelementen die Massen der 'nackten' $|N\rangle$, $|S\rangle$, bzw. $|G\rangle$ Zustände stehen und die außerdiagonalen Elemente einerseits die Amplituden für die Mischung der verschiedenen radialen Anregungen der $q\bar{q}$ - und gg - Zuständen jeweils untereinander und andererseits die $(q\bar{q} \leftrightarrow gg)$ - Mischungsamplituden enthalten. Die Massenmatrix, die es zu diagonalisieren gilt, bauen wir dementsprechend auf :

$$(\hat{M})_{ij} = \begin{pmatrix} |N\rangle_i \leftrightarrow |N\rangle_j & |N\rangle_i \leftrightarrow |S\rangle_j & |N\rangle_i \leftrightarrow |G\rangle_j \\ |S\rangle_i \leftrightarrow |N\rangle_j & |S\rangle_i \leftrightarrow |S\rangle_j & |S\rangle_i \leftrightarrow |G\rangle_j \\ |G\rangle_i \leftrightarrow |N\rangle_j & |G\rangle_i \leftrightarrow |S\rangle_j & |G\rangle_i \leftrightarrow |G\rangle_j \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

Die *Diagonalelemente* $(\hat{M})_{ii}$ sind gerade die Bag-Massen der ungestörten $q\bar{q}$ - bzw. gg - Konfigurationen, wie wir sie schon für die Betrachtung der Hadronen und der Glueballs in Kap.6 berechnet haben. Sie ergeben sich, wie in Kap.5, Abschnitt 5.2 erläutert, aus den Formeln (5.21)-(5.31) und den Matrixelementen (5.10 a,c) :

$$V_{ii}^{q\bar{q}} = \langle Q_i | \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1: } q\bar{q} \text{ lines} \\ \text{Diagram 2: } q\bar{q} \text{ lines with gluon exchange} \\ \text{Diagram 3: } q\bar{q} \text{ lines with gluon exchange} \\ \text{Diagram 4: } q\bar{q} \text{ lines with gluon exchange} \end{array} \right] | Q_i \rangle \quad (7.6a)$$

$$V_{ii}^{gg} = \langle G_i | \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6} \right) | G_i \rangle \quad (7.6b)$$

wobei $|Q\rangle_i$ für $|N\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\bar{u} + d\bar{d}\rangle_i$ oder $|S\rangle_i = |s\bar{s}\rangle_i$ steht und $|G\rangle_i = |g^{(TE)}g^{(TM)}\rangle_i$, entsprechend (7.1).

Die *außerdiagonalen Elemente* $(\hat{M})_{ij}$, $i \neq j$, welche die Mischung der verschiedenen $q\bar{q}$ - bzw. gg - Anregungszustände untereinander beschreiben ($|N\rangle_i \leftrightarrow |N\rangle_j$, $|S\rangle_i \leftrightarrow |S\rangle_j$, $|N\rangle_i \leftrightarrow |S\rangle_j$, bzw. $|G\rangle_i \leftrightarrow |G\rangle_j$), haben wir ebenfalls schon für die Berechnung der Hadron- bzw. Glueball-Massen ausgewertet. Sie sind gerade durch die Wechselwirkungs-Matrixelemente zwischen verschiedenen (!) $q\bar{q}$ - bzw. gg - Bag-Eigenzuständen gegeben :

$$V_{ij}^{q\bar{q}} = \langle Q_i | \text{diagram} | Q_j \rangle \quad (7.7a)$$

$$V_{ij}^{gg} = \langle G_i | \text{diagram 1} + \text{diagram 2} | G_j \rangle \quad (7.7b)$$

wobei $i \neq j$ und $|Q\rangle \equiv |N\rangle, |S\rangle$.

Neu hinzu kommt nun die Berücksichtigung der $(q\bar{q} \leftrightarrow gg)$ - Wechselwirkung, die in $O(\alpha_s)$ die Auswertung der Matrixelemente

$$V_{ij}^{q\bar{q} \leftrightarrow gg} = \frac{1}{2} \langle G_i | \text{diagram 1} + \text{diagram 2} | Q_j \rangle + \frac{1}{2} \langle Q_i | \text{diagram 3} + \text{diagram 4} | G_j \rangle \quad (7.7c)$$

erfordert. Die explizite Berechnung dieser Matrixelemente geschieht durch Anwendung der Feynman-Regeln aus Kap.4, ganz analog wie die Auswertung der Diagramme in (7.6 a,b), (7.7 a,b) und ist in Anhang C ausgeführt.

Damit haben wir alle Zutaten beisammen und können die Mischungskoeffizienten in (7.3) durch Diagonalisierung der Massenmatrix $\hat{M}$, (7.5), die den $q\bar{q}$ - bzw. gg -Gehalt der physikalischen Zustände $|\eta\rangle$, $|\eta'\rangle$ und $|\iota\rangle$, sowie deren Anregungen angeben.

7.1.2 Resultate für die $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischung

Wir haben die Mischung von η , η' und ι (sowie deren angeregter Zustände) entsprechend dem im vorangegangenen Abschnitt 7.1.1 berechnet. Dabei haben wir die zwei folgenden *Annahmen* gemacht :

1. Für die Bag-Konstante $B^{\frac{1}{4}}$, den QCD-Skalenparameter Λ und die strange Quark-Masse $m^{(s)}$ verwenden wir dieselben Parameterwerte wie in Kap.6, Abschnitte 6.1 und 6.2.
2. Für die Massen von η , η' und ι setzen wir ihre experimentellen Werte an ($M_\eta = 549$ MeV, $M_{\eta'} = 859$ MeV, $M_\iota = 1440$ MeV), was eine geringfügige Änderung der Werte für die Selbstenergieparameter $\epsilon_S^{(q)}$ der Quarks und $\epsilon_S^{(TE)}$, $\epsilon_S^{(TM)}$ der Gluonen bedingt.

Damit ist unser (η - η' - ι) - Mischungsmodell vollständig festgelegt und enthält keine freien Parameter mehr.

Die Diagonalisierung der Massenmatrix (7.5) liefert dann die Mischungskoeffizienten aus (7.3), die den Quark- und Gluon-Gehalt der physikalischen Zustände (7.2), $|\Psi\rangle = |\eta\rangle, |\eta'\rangle, |\iota\rangle, \dots, |\eta^*\rangle, |\eta'^*\rangle, |\iota^*\rangle, \dots$ angeben und zwar unter der *Bedingung*, daß die Zustände $|\eta\rangle, |\eta'\rangle$ und $|\iota\rangle$ die experimentellen Massen reproduzieren.

Wir erhalten damit Vorhersagen über die innere Zusammensetzung der physikalischen Zustände bezüglich ihrer quarkonischen und gluonischen Komponenten, sowie zudem über die Massen der angeregten Zustände $M_{\eta^*}, M_{\eta'^*}, M_{\iota^*}, \text{etc.}$.

Die Resultate sind in den folgenden Tabellen 7.1(a)-7.1(c) zusammengestellt.

$$|\eta\rangle = \begin{pmatrix} 0.795 \\ 0.095 \\ 0.019 \\ 0.086 \\ 0.037 \\ 0.032 \end{pmatrix} |N\rangle_i + \begin{pmatrix} -0.588 \\ -0.036 \\ 0.013 \\ 0.017 \\ -0.008 \\ 0.009 \end{pmatrix} |S\rangle_i + \begin{pmatrix} -0.117 \\ -0.051 \\ -0.005 \\ -0.009 \\ -0.001 \\ -0.000 \end{pmatrix} |G\rangle_i$$

$$|\eta'\rangle = \begin{pmatrix} 0.534 \\ -0.081 \\ -0.033 \\ -0.052 \\ -0.049 \\ -0.041 \end{pmatrix} |N\rangle_i + \begin{pmatrix} 0.757 \\ 0.064 \\ -0.017 \\ -0.042 \\ 0.003 \\ -0.012 \end{pmatrix} |S\rangle_i + \begin{pmatrix} 0.397 \\ 0.158 \\ -0.006 \\ -0.002 \\ 0.003 \\ -0.001 \end{pmatrix} |G\rangle_i$$

$$|\iota\rangle = \begin{pmatrix} -0.052 \\ 0.159 \\ 0.387 \\ 0.010 \\ 0.006 \\ 0.000 \end{pmatrix} |N\rangle_i + \begin{pmatrix} -0.095 \\ 0.208 \\ 0.212 \\ 0.025 \\ 0.003 \\ 0.001 \end{pmatrix} |S\rangle_i + \begin{pmatrix} -0.849 \\ -0.105 \\ -0.032 \\ -0.034 \\ -0.006 \\ -0.008 \end{pmatrix} |G\rangle_i$$

Tabelle 7.1(a) :

Die physikalischen Zustände $|\eta\rangle$, $|\eta'\rangle$ und $|\iota\rangle$ als Überlagerung von 'nonstrange' ($|N\rangle_i$), 'strange' ($|S\rangle_i$) und rein gluonischen ($|G\rangle_i$) Zuständen, unter der Bedingung, daß $M_\eta = 549 \text{ MeV}$, $M_{\eta'} = 958 \text{ MeV}$ und $M_\iota = 1440 \text{ MeV}$ fixiert sind.

Der Index i bezieht sich auf die jeweiligen radialen Bag-Eigenmoden der ungestörten $q\bar{q}$ -, bzw. gg -Zustände im Bag, $|N\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\bar{u} + d\bar{d}\rangle_i$, $|S\rangle_i = |s\bar{s}\rangle_i$, $|G\rangle_i = |g^{(TE)}g^{(TM)}\rangle_i$, ($i = 1, \dots, 6$; $i = 1$ bezeichnet die Grundzustände).

P	M_P (GeV)	$M_P^{(EXP)}$ (GeV)
η	<u>0.549</u>	<u>0.549</u>
η^*	1.328	1.275 (?)
η^{**}	2.103	?
η'	<u>0.958</u>	<u>0.958</u>
η'^*	1.936	?
η'^{**}	2.710	?
ι	<u>1.440</u>	<u>1.440</u>
ι^*	2.105	?
ι^{**}	2.855	?

Tabelle 7.1(b) :

Werte für die Massen von η , η' , ι und für jeweils deren ersten beiden angeregten Zustände. Die Massen von η , η' , und ι sind fixiert; die anderen Werte sind Vorhersagen, die sich aus der Diagonalisierung der Mischungsmatrix (7.5) ergeben.

Parameterwerte:

Bag-Konstante	$B^{\frac{1}{4}}$	= 240 MeV	aus Parameter-Fit des
Skalenparameter	Λ	= 167 MeV	Hadronspektrums
s - Quark Masse	$m^{(s)}$	= 268 MeV	(Kap.6, Abschnitt 6.1)
Quark-Selbstenergie	$\epsilon_S^{(q)}$	= -1.1	
Gluon-Selbstenergie	$\epsilon_S^{(TE)} + \epsilon_S^{(TM)}$	= -1.3	

Tabelle 7.1(c) :

Die Parameterwerte für $B^{\frac{1}{4}}$, Λ und $m^{(s)}$ sind diesselben wie in Kapitel 6, Abschnitt 6.1. Die Selbstenergie-Parameter für die Quarks, $\epsilon_S^{(q)}$, und die Gluonen, $\epsilon_S^{(TE)}$, $\epsilon_S^{(TM)}$, werden durch die Bedingung festgelegt, daß die Diagonalisierung der Mischungsmatrix (7.5) für η , η' , und ι die experimentellen Massen reproduziert und sind leicht verschieden von den Werten aus Kapitel 6.

Die *phänomenologischen Implikationen der Resultate aus Tabelle 7.1* sind offensichtlich :

1. Das η - Teilchen ist ein nahezu reiner quarkonischer Zustand und besteht zu etwa 64% aus 'non-strange' und zu 35% aus 'strange' Anteilen. Die gluonischen Beimischungen betragen hingegen nur etwa 1.5%.
2. Das η' - Teilchen dagegen enthält immerhin etwa 18% gluonische Komponenten. Die 'non-strange,' bzw. 'strange' Quark-Anteile tragen zu 29%, bzw. 53% bei.
3. Das ι - Teilchen ist nach dieser Analyse zu etwa 74% aus rein gluonischen Anteilen zusammengesetzt, d.h. das ι ist zwar in erster Linie ein Glueball, enthält jedoch deutliche 'Verunreinigungen' durch $q\bar{q}$ -Beimischungen. Von den quarkonischen Komponenten sind die radialen Anregungen $|N_2 >, |N_3 >, |S_2 >$ und $|S_3 >$ am stärksten beigemischt, da deren Energien der Masse des ι am nächsten sind.

	$\frac{1}{\sqrt{2}} u\bar{u} + d\bar{d} >$	$ s\bar{s} >$	$ g^{(TE)} g^{(TM)} >$
η	64 %	34.5 %	1.5 %
η'	29 %	53 %	18 %
ι	17 %	9 %	74 %

Tabelle 7.2 :

Effektive Anteile der quarkonischen und gluonischen Komponenten in η , η' und ι entsprechend den Resultaten aus Tabelle 7.1(a).

4. Im Massenbereich 1-2 GeV gibt es nach obigen Berechnungen mindestens noch zwei weitere η -artige Zustände, nämlich die angeregten Zustände η^* und η'^* mit Massen $m_{\eta^*} = 1.33$ GeV und $m_{\eta'^*} = 1.94$ GeV.
5. Die Massen der ersten beiden angeregten Zustände des ι -Teilchens, $m_{\iota^*} = 2.105$ GeV und $m_{\iota'^*} = 2.855$ GeV sind durch die Mischung mit quarkonischen Zuständen deutlich schwerer als ihre rein gluonischen Gegenstücke aus Kap6, Abschnitt 6.2.2, Tab. 6.5, wonach $m_{\iota^*} = 1.91$ GeV und $m_{\iota'^*} = 2.27$ GeV ist. Die Masse des ι selbst ist in beiden Fällen gefittet.

Diskussion der Ergebnisse

1. Mischung von η und η' untereinander

Unsere Resultate für die (η - η' - ι) - Mischung weichen signifikant von der naiven Vorstellung der *idealen Mischung von η und η'* ab, wonach für einen Mischungswinkel $\alpha_P \simeq \pm 45^\circ$ gilt:

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= 0.707 |N_0\rangle - 0.707 |S_0\rangle \\ |\eta'\rangle &= 0.707 |N_0\rangle + 0.707 |S_0\rangle \end{aligned} \quad (7.8a)$$

Dagegen finden wir in unserem Modell nach Tabelle 7.1(a) für die *Mischung zwischen η und η' unter Berücksichtigung gluonischer Beimischungen*:

$$\begin{aligned}
|\eta\rangle &= 0.795 |N_0\rangle - 0.588 |S_0\rangle + \text{radiale } q\bar{q}\text{-Anregungen } |N_i\rangle, |S_i\rangle \\
&\quad + \text{gluonische Komponenten } |G_i\rangle \\
|\eta'\rangle &= 0.534 |N_0\rangle + 0.757 |S_0\rangle + \text{radiale } q\bar{q}\text{-Anregungen } |N_i\rangle, |S_i\rangle \\
&\quad + \text{gluonische Komponenten } |G_i\rangle
\end{aligned}
\tag{7.8b}$$

Dies entspricht einem 'effektiven Mischungswinkel' $\alpha_P \simeq \pm 53^\circ$.

Zum Vergleich ergibt eine entsprechende Analyse für die *Mischung zwischen η und η' ohne (!) gluonische Beimischungen* (d.h. die Diagonalisierung der rein quarkonischen Untermatrix in (7.5)) in unserem Modell:

$$\begin{aligned}
|\eta\rangle &= 0.831 |N_0\rangle - 0.542 |S_0\rangle + \text{radiale } q\bar{q}\text{-Anregungen } |N_i\rangle, |S_i\rangle \\
|\eta'\rangle &= 0.552 |N_0\rangle + 0.824 |S_0\rangle + \text{radiale } q\bar{q}\text{-Anregungen } |N_i\rangle, |S_i\rangle
\end{aligned}
\tag{7.8c}$$

was einem 'effektiven Mischungswinkel' von $\alpha_P \simeq \pm 56^\circ$. entspricht.

Experimentelle Analysen (PD 88) der η - η' Mischung favorisieren ebenfalls einen Mischungswinkel von $\alpha_P \simeq \pm 56^\circ$.

Die obige Gegenüberstellung der η - η' Mischung in unserem Modell, einmal mit und einmal ohne gluonische Beimischungen, Gl.(7.8 b,c), macht deutlich, daß der größere Mischungswinkel α_P gegenüber der idealen Mischung, Gl.(7.8 a), in erster Linie durch

die Wechselwirkung mit angeregten Quark-Zuständen verursacht wird. Der Einfluß der gluonischen Komponenten auf die Mischung von η und η' untereinander (!) ist offensichtlich gering.

Im Vergleich zur idealen Mischung des naiven Quark-Modells, Gl.(7.8 a), enthält in unserem Modell das η weniger 'strange' Quark-Anteile und das η' entsprechend weniger 'non-strange' Quark-Anteile. Dieser Unterschied macht sich in der Berechnung der elektromagnetischen Zerfälle $\phi \rightarrow \eta \gamma$, $\eta' \rightarrow \rho \gamma$ und $\eta' \rightarrow \omega \gamma$ bemerkbar, welche ein Maß für den 'strange' Quark-Gehalt des η , bzw. für die 'non-strange' Quark-Anteile des η' sind. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, erhalten wir mit unseren Mischungsamplituden aus Tabelle 7.1 zum Teil deutlich bessere Vorhersagen als das naive Quark-Modell, insbesondere für den Zerfall $\phi \rightarrow \eta \gamma$.

2. Experimentelle Ergebnisse

Die Resultate für die $(\eta - \eta' - \iota)$ - Mischung aus Tabelle 7.1 liegen gut im Rahmen der der Schranken, die von experimentellen Daten gesetzt werden (vgl. Bal 85, Pa 87, Cl 88) : Die Ergebnisse der 'MARK III' - Experimente (Bal 85) lassen darauf schließen, daß das η in der Tat ein rein quarkonischer Zustand ist, während für das η' gluonische Beimischungen (und radiale Anregungen) bis zu 35% ausmachen können. Zu einem ähnlichen Schluß gelangt J.R.Rosner (Ro 83) in einer Analyse von experimentellen Daten der Zerfälle von η , η' und ι .

3. Andere theoretische Modelle für die $(\eta - \eta' - \iota)$ - Mischung

In der Literatur existieren eine Vielzahl von Rechnungen zum $(\eta - \eta' - \iota)$ - Mischungsproblem (z.B. Fr 84, Fr 85, Te 83, Te84, Bag 86, Bas 88, Ka83, Pa 84). Trotz unterschiedlichster Ansätze besteht generell eine qualitative Übereinstimmung der Ergebnisse, mit denen auch unsere Vorhersagen in Einklang sind.

Besonders hervorzuheben sind in diesem Zusammenhang die Arbeiten von M. Frank und P.J.O'Donnell (Fr 84, Fr 85). Die Autoren verwenden ein nicht-relativistisches Quark-Modell mit einem harmonischen Oszillator-Potential und berücksichtigen ebenso wie wir auch radiale Anregungen von $q\bar{q}$ -Zuständen. Die Resultate ihrer Analyse zeigen eine verblüffende Übereinstimmung mit den unseren, obwohl wir einen gänzlich anderen Modellansatz zugrunde legen.

4. Fazit

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß unsere Ergebnisse für die $(\eta - \eta' - \iota)$ - Mischung keineswegs eine Folge unserer spezifischen Modell-Annahmen sind, sondern vielmehr offensichtlich eine direkte Konsequenz der Eigenschaften der starken Wechselwirkung und der ihr zugrundeliegenden Theorie der QCD.

7.2 Zerfallseigenschaften von η , η' und ι

Wir können nun, ausgehend von den Ergebnissen des (η - η' - ι) - Mischungsansatzes in Abschnitt 7.1, die elektromagnetischen Zerfälle und die 2-Photon Zerfälle der pseudoskalaren Teilchen und der Vektor-Mesonen im Rahmen unseres Modells untersuchen. Wir werden die Zerfallsbreiten verschiedener Reaktionskanäle berechnen und mit aktuellen experimentellen Daten vergleichen. Auf diese Weise bekommen wir ein Maß dafür, wie akkurat die Beschreibung dieser Zerfälle in unserem Modell ist und inwieweit unsere Vorhersagen quantitative Aussagekraft haben.

Im Gegensatz zur generellen Übereinstimmung der Vorhersagen für das Massenspektrum und die Quantenzahlen J^{PC} der niedrigliegenden Glueballs (vgl. Kap.6, Abschnitt 6.2), gibt es i. a. beträchtliche Ungewißheiten über die zu erwartenden Zerfallseigenschaften und Breiten dieser Zustände. Dies ist nicht weiter verwunderlich, denn selbst für die ausgiebig studierte Dynamik der gewöhnlichen (quarkonischen) Hadronen ist die Kenntnis der zugrundeliegenden Mechanismen sehr begrenzt.

Zwar lassen sich durch Symmetriebetrachtungen im Rahmen phänomenologischer Modelle, wie dem *Quark-Modell* (Fe 69) und der *Vektor-Dominanz Hypothese* (Sa 69) Relationen zwischen den Zerfallskanälen und Breiten für verschieden Hadronen aufstellen, jedoch muß man in jedem Fall experimentelle Daten zumindest eines Zerfalls zugrunde legen, um eine Größenskala festsetzen zu können.

Für den Glueball-Sektor haben wir jedoch in Ermangelung eines etablierten, d.h. eindeutig identifizierten Glueballs keine derartige Markierung zur Verfügung. Es ist jedoch möglich, wie im folgenden erläutert wird, die Zerfälle von Glueballs dennoch quantitativ zu beschreiben, indem man auf das Wissen über die Zerfallseigenschaften

von gewöhnlichen Hadronen zurückgreift und auf Glueball-Zustände im Sinne der Definition zu Beginn von Abschnitt 7.1 überträgt. Mit anderen Worten, wenn wir Hadronen und Glueballs allgemein als Mischzustände von quarkonischen und gluonischen Anteilen mit entsprechender Wichtung dieser Komponenten auffassen, wie wir es in Abschnitt 7.1 für η , η' und ι getan haben, so gelangt man zu einer vereinheitlichten Beschreibung der Dynamik von Glueballs und Hadronen.

Im folgenden studieren wir im Detail die elektromagnetischen Strahlungszерfälle und die $\gamma\gamma$ - Zerfälle von η , η' und ι , indem wir Standardmethoden der Berechnung gewöhnlicher mesonischer Zerfälle auf unser Modell übertragen.

7.2.1 Elektromagnetische Strahlungszерfälle

Ein *charakteristisches Merkmal für die Erkennung von Glueballs* könnte ihr Verhalten in γ - Strahlungszерfällen sein, das durch die Kopplung der Teilchen an das elektromagnetische Feld bestimmt wird. Im Quark-Modell ist die elektromagnetische Kopplung von Teilchenzuständen, die aus Quarks und Gluonen aufgebaut sind, proportional zur Ladung der Konstituenten. Da die Gluonen elektrisch neutral sind, erwartet man naiv, dass Glueballs nicht an die Photonen koppeln. Zieht man allerdings $q\bar{q}$ -Beimischungen in der Glueball-Wellenfunktion in Betracht, so können diese Glueball-Zustände durchaus elektromagnetisch zerfallen - eben entsprechend ihrem Quark-Gehalt, über den die Kopplung an das elektromagnetische Feld vermittelt wird.

Wenn wir also annehmen, daß die potentiellen Glueball-Kandidaten gegenüber ihren

dominanten gluonischen Komponenten nur geringe Beimischungen von Quark-Zuständen haben und das gerade erläuterte Bild der Zerfallsdynamik richtig ist, so sollten sich diese Zustände in ihren γ - Zerfallseigenschaften erkennbar von den normalen $q\bar{q}$ -Mesonen unterscheiden. Daher ist eine Analyse der elektromagnetischen Strahlungszерfälle ein aufschlußreiches Hilfsmittel zur Identifikation von Glueballs.

Ein vorteilhafter Zug unseres (η - η' - ι) - Mischungsmodells aus Abschnitt 7.1 ist die Möglichkeit, die elektromagnetischen Zerfälle von η , η' , ι und deren angeregter Zustände direkt zu berechnen, ohne zusätzliche Modellannahmen oder Parameter einführen zu müssen.

Wie oben erläutert wurde, spiegeln die elektromagnetischen Zerfallseigenschaften der Mesonen indirekt deren Quark- und Gluon-Gehalt wieder. Die physikalischen Zustände $|\eta\rangle$, $|\eta'\rangle$, $|\iota\rangle$, etc. koppeln über die elektrische Ladung der 'non-strange' und 'strange' Quarks an das elektromagnetische Feld und zwar gewichtet entsprechend ihren Anteilen an u -, d -, und s - Quarks.

Mit anderen Worten, die physikalischen Zustände, einschließlich der Glueballs wie das ι - Teilchen, können nur über ihre quarkonischen ($q\bar{q}$) Beimischungen elektromagnetisch zerfallen, die rein gluonischen (gg) Komponenten koppeln nicht an die Photonen.

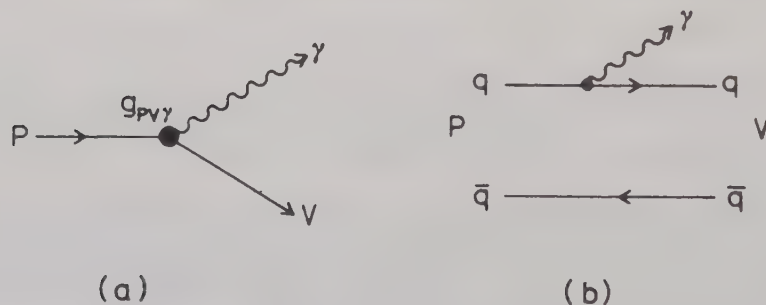
Gerade diese Beimischungen verschiedener (reiner) $q\bar{q}$ - und gg - Komponenten in den physikalischen Zuständen $|\eta\rangle$, $|\eta'\rangle$, $|\iota\rangle$, etc. haben wir aber in Abschnitten 7.1 berechnet. Mit den Mischungskoeffizienten aus Tabelle 7.1 können wir nun die elektromagnetischen Zerfallsbreiten berechnen.

Dazu betrachten wir das *Übergangsmatrixelement* $M_{PV\gamma}$ für den Zerfall $P \rightarrow V + \gamma$ eines pseudoskalaren Zustands P ($J^{PC} = 0^{-+}$) in ein Vektormeson V ($J^{PC} = 1^{--}$)

und ein Photon γ (vgl. Fig.7.1). $M_{PV\gamma}$ hat die allgemeine Lorentz-invariante Struktur (Su 78, O'Do 81, Do 84, Te 84):

$$\begin{aligned} M_{PV\gamma} &= \langle V(p', \epsilon^{(V)}) | \hat{J}_{em}^\mu(0) | P(p) \rangle \\ &= g_{PV\gamma}(q^2) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\nu^{(V)} p_\alpha q_\beta \end{aligned} \quad (7.9)$$

Dabei bezeichnen p' bzw. $\epsilon^{(V)}$ den Vierer-Impuls bzw. Polarisationsvektor des Vektormesons V , p den Vierer-Impuls des Pseudoskalars P und $q = p' - p$. Die invariante Übergangsamplitude $g_{PV\gamma}$ beschreibt die effektive Kopplungsstärke zwischen Eingangs- und Ausgangskanal (vgl. Fig.7.1).



Figur 7.1:

Diagrammatische Darstellung der Zerfälle $P \rightarrow V + \gamma$ (entsprechend $V \rightarrow P + \gamma$): (a) Quark-Modell, (b) Feynman-Diagramm .

Die *Zerfallsbreite* $\Gamma(P \rightarrow V \gamma)$ ist dann gegeben durch (Fe 69, O'Do 81):

$$\Gamma(P \rightarrow V \gamma) = \frac{|K|^3}{4\pi} \cdot g_{PV\gamma}^2 \quad (7.10)$$

wobei

$$|K| = \frac{M_P^2 - M_V^2}{2M_P} \quad (7.11)$$

der Impuls des Photons im Schwerpunktsystem ist.

Für Zerfälle der Art $V \rightarrow P + \gamma$ ist in (7.10) und (7.11) lediglich P mit V zu vertauschen (wobei $g_{PV\gamma}^2 = g_{VP\gamma}^2$) und mit einem Faktor $\frac{1}{3}$ zu multiplizieren, da in diesem Fall über die Anfangsspins des Vektormesons V gemittelt werden muß.

Die elektromagnetischen Zerfälle $P \rightarrow V + \gamma$ bzw. $V \rightarrow P + \gamma$ werden im Quark-Modell durch *magnetische Dipolübergänge* beschrieben (Fe 69, Su 78, O'Do 81), d.h. durch den Operator des magnetischen Moments

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{r} \times \vec{j}_{em}) \quad (7.12)$$

Damit läßt sich die invariante *Übergangsamplitude* $g_{PV\gamma}$ (Gl.(7.9), (7.10)) in unserem Modell durch die Bag-Matrixelemente

$$g_{PV\gamma} = \langle Bag | V(J'_z) | \hat{\mu}_z | P \rangle_{Bag} \quad (7.13)$$

ausdrücken (Cl 79, Do 84).

Zu diesen Matrixelementen tragen nur die quarkonischen Anteile in den Zuständen $|V\rangle$ und $|P\rangle$ bei, da wie zuvor erläutert, die rein gluonischen Komponenten nicht an die Photonen koppeln und folglich auch nicht an elektromagnetischen Dipolübergängen teilnehmen. Entsprechend der Darstellung der physikalischen Zustände

durch Gl.(7.3) zerlegen wir daher allgemein $|V\rangle$ und $|P\rangle$ in ihre rein quarkonischen und rein gluonischen Anteile:

$$|V\rangle = \sum_{i=1}^6 a_i^{(V)} |N\rangle_i + \sum_{i=1}^6 b_i^{(V)} |S\rangle_i + \sum_{i=1}^6 c_i^{(V)} |G\rangle_i \quad (7.14a)$$

$$|P\rangle = \sum_{i=1}^6 a_i^{(P)} |N\rangle_i + \sum_{i=1}^6 b_i^{(P)} |S\rangle_i + \sum_{i=1}^6 c_i^{(P)} |G\rangle_i \quad (7.14b)$$

Damit erhalten wir für die *Übergangsamplitude* (7.13):

$$\begin{aligned} g_{PV\gamma} &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \left[a_i^{(V)} a_j^{(P)} \langle N_i | \hat{\mu}_z | N_j \rangle + b_i^{(V)} b_j^{(P)} \langle S_i | \hat{\mu}_z | S_j \rangle \right] \\ &\equiv g_{PV\gamma}^{(N)} + g_{PV\gamma}^{(S)} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Die rein gluonischen Anteile ($\sim |G\rangle_i$) von $|P\rangle$ und $|V\rangle$ tragen wie gesagt nicht bei; außerdem gibt es auch keine Mischterme der Form $\langle N | \hat{\mu}_z | S \rangle$ (Flavour-Symmetrie!).

Es ist üblich die Zerfallsbreiten $\Gamma(P \rightarrow V\gamma)$ bzw. $\Gamma(V \rightarrow P\gamma)$ auf den Referenzwert $\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma)$ zu normieren, um eine Skala festzulegen. Unter Verwendung von Gl.(7.10),(7.11) und (7.15) schreiben wir daher die *elektromagnetischen Zerfallsbreiten* in der folgenden Form:

$$\Gamma(P \rightarrow V \gamma) = 3 \left(\frac{K_{PV\gamma}}{K_{\omega\pi^0\gamma}} \right)^3 \left[\sum_{F=N,S} P_F \cdot g_{PV\gamma}^{(F)} \right]^2 \times \Gamma(\omega \rightarrow \pi^0 \gamma) \quad (7.16a)$$

$$\Gamma(V \rightarrow P \gamma) = \left(\frac{K_{VP\gamma}}{K_{\omega\pi^0\gamma}} \right)^3 \left[\sum_{F=N,S} P_F \cdot g_{VP\gamma}^{(F)} \right]^2 \times \Gamma(\omega \rightarrow \pi^0 \gamma) \quad (7.16b)$$

wobei

$$\frac{K_{PV\gamma}}{K_{\omega\pi^0\gamma}} = \frac{M_P^2 - M_V^2}{M_\omega^2 - M_{\pi^0}^2} \cdot \frac{M_\omega}{M_P} \quad (7.17a)$$

$$\frac{K_{VP\gamma}}{K_{\omega\pi^0\gamma}} = \frac{M_V^2 - M_P^2}{M_\omega^2 - M_{\pi^0}^2} \cdot \frac{M_\omega}{M_V} \quad (7.17b)$$

und $g_{PV\gamma} = g_{VP\gamma}$ durch Gl.(7.15) gegeben ist.

In (7.16) haben wir die *Faktoren* P_F eingeführt, die das relative Gewicht des betrachteten Zerfalls $P \rightarrow V \gamma$ bzw. $V \rightarrow P \gamma$ bezüglich des Zerfalls $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$ berücksichtigen - entsprechend der Quark-Flavour Zusammensetzung und der Ladung von Pseudoskalar P und Vektormeson V. Die Wichtungsfaktoren P_F für die hier interessierenden Zerfälle sind in Tabelle 7.4 angegeben (vgl. z.B. Fe 69, O'Do 81).

Die Ausdrücke (7.15)-(7.17) sind unsere grundlegenden Formeln zur *Berechnung der elektromagnetischen Zerfallsbreiten* $\Gamma(P \rightarrow V \gamma)$ und $\Gamma(V \rightarrow P \gamma)$: Die Massen M_P für $P = \eta, \eta', \iota, \eta^*, \eta'^*, \iota^*, \dots$, sowie die Mischungskoeffizienten $a_i^{(P)}, b_i^{(P)}$ in (7.15) haben wir in Abschnitt 7.2.1 durch Diagonalisierung der Mischungsmatrix berechnet. Sie sind in Tabelle 7.1 angegeben. Für die Massen der Vektormesonen M_V , $V = \omega, \rho, \phi$ und die Mischungskoeffizienten $a_i^{(V)}$ und $b_i^{(V)}$ verwenden wir unsere Resultate aus der Analyse der Hadronen in Kap.6, Abschnitt 6.1.

Es verbleibt nur noch die *Auswertung der Matrixelemente des magnetischen Dipoloperators* $\hat{\mu}_z$ in Gl.(7.15) zwischen den verschiedenen $|N\rangle_i$ und $|S\rangle_i$ Bag-Eigenzuständen. Dazu ist zu bemerken, daß die Dipol-Übergangsamplituden zwischen unterschiedlichen radialen Anregungen der $q\bar{q}$ -Zustände gegenüber den Amplituden zwischen den Grundzuständen drastisch vermindert sind. Das hängt damit zusammen, daß die Wellenfunktionen zweier unterschiedlicher radialer Anregungen nahezu orthogonal sind. Aufgrund des relativistischen Charakters der Wellenfunktionen ist die Orthogonalität für die μ_z -Übergänge nicht exakt, im Gegensatz zu nicht-relativistischen Modellen. Nichtsdestotrotz ist die Unterdrückung der Dipolübergänge zwischen angeregten Zuständen gegenüber dem Übergang zwischen den Grundzuständen sehr stark (~ 1 -2 Größenordnungen), wie aus Tabelle 7.3 ersichtlich ist (Do 84). Diese Eigenschaft bedeutet für die invariante Amplitude $g_{PV\gamma}$, Gl.(7.15), daß im wesentlichen nur die magnetischen Dipolübergänge zwischen je zwei Zuständen derselben Bag-Eigenmode beitragen.

Dipolübergang	μ / μ_0
$1 S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 1 S_{\frac{1}{2}}$	1
$2 S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 1 S_{\frac{1}{2}}$	-0.05
$2 S_{\frac{1}{2}} \rightarrow 2 S_{\frac{1}{2}}$	0.32
$1 P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 1 P_{\frac{1}{2}}$	0.41
$2 P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 1 P_{\frac{1}{2}}$	0.01
$2 P_{\frac{1}{2}} \rightarrow 2 P_{\frac{1}{2}}$	0.23

Tabelle 7.3 :

Relative Größe $\frac{\mu}{\mu_0}$ für verschiedene magnetische Dipolübergänge μ im Vergleich zur Stärke des Grundzustands-Übergangs μ_0 .

Die *Ergebnisse unserer Berechnungen der elektromagnetischen Zerfallsbreiten* gemäß den Gleichungen (7.15)-(7.17) für die pseudoskalaren Zustände η , η' , ι und die Vektormesonen ρ , ω , ϕ sind in Tabelle 7.4 zusammengestellt. Als einzigen 'Input' verwenden wir den experimentellen Wert für $\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0 \gamma) = 680 \pm 76 \text{ KeV}$ in Gl.(7.16). Alle anderen Zerfallsbreiten sind Vorhersagen unseres Modells. Gezeigt sind die berechneten Breiten Γ^{Calc} für die verschiedenen Zerfälle der Grundzustände im Vergleich zu den experimentellen Werten Γ^{Exp} , soweit verfügbar.

Zerfall $A \rightarrow B \gamma$	Relatives Gewicht		Phasenraum		Zerfallsbreite $\Gamma(A \rightarrow B \gamma)$	
	P_N	P_S	c	$\left(\frac{K_{AB\gamma}}{K_{\omega\pi^0\gamma}} \right)^3$	$\Gamma^{Calc} \text{ (KeV)}$	$\Gamma^{Exp} \text{ (KeV)}$
$\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$	1	0	1	1	—	$680 \pm 76^{(a)}$
$\rho \rightarrow \eta \gamma$	1	0	1	0.133	57.2	$\left\{ \begin{array}{l} 55.2 \pm 13.8^{(a)} \\ 82.8 \pm 16.9^{(a)} \end{array} \right.$
$\omega \rightarrow \eta \gamma$	$\frac{1}{3}$	0	1	0.144	6.9	$6.8 \pm 3.4^{(a)}$
$\phi \rightarrow \eta \gamma$	0	$\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_s}{\mu_u} \right)$	1	0.865	58.2	$56.5 \pm 2.6^{(a)}$
$\eta' \rightarrow \rho \gamma$	1	0	3	0.080	54.9	$62.3 \pm 2.9^{(a)}$
$\eta' \rightarrow \omega \gamma$	$\frac{1}{3}$	0	3	0.073	5.6	$6.2 \pm 0.6^{(a)}$
$\phi \rightarrow \eta' \gamma$	0	$\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_s}{\mu_u} \right)$	1	0.004	0.51	?
$\iota \rightarrow \rho \gamma$	1	0	3	2.475	485.2	$\left\{ \begin{array}{l} \approx 2 \cdot 10^3^{(b)} \\ \approx 1 \cdot 10^3^{(c)} \\ < 0.5 \cdot 10^3^{(d)} \end{array} \right.$
$\iota \rightarrow \omega \gamma$	$\frac{1}{3}$	0	3	2.375	51.7	?
$\iota \rightarrow \phi \gamma$	0	$\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_s}{\mu_u} \right)$	3	0.843	39.9	?

Tabelle 7.4 :

Berechnete Breiten für die elektromagnetischen Zerfälle, an denen η , η' und ι beteiligt sind, Γ^{Calc} , im Vergleich zu aktuellen experimentellen Daten Γ^{Exp} , soweit vorhanden. Der experimentelle Wert von $\Gamma(\omega \rightarrow \pi^0 \gamma)$ dient als 'Input', (vgl. Gl.(7.16)). Alle anderen Werte Γ^{Calc} sind Vorhersagen des Modells.

Die zweite Spalte listet die Wichtungsfaktoren P_F ; $F = N, S$ aus Gl.(7.16), die das relative Gewicht der 'non-strange' bzw. der 'strange' Quark-Komponenten in den Übergangsamplituden für die verschiedenen Zerfälle bezüglich der Amplitude für $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$ berücksichtigen. Für das Verhältnis $\left(\frac{\mu_s}{\mu_u} \right)$ verwenden wir den Wert des Quark-Modells, $\frac{\mu_s}{\mu_u} = \frac{m_u}{m_s} \approx \frac{350 \text{ MeV}}{606 \text{ MeV}}$. Die dritte Spalte gibt die Beiträge der Phasenraumfaktoren an.

Die experimentellen Werte Γ^{Exp} sind entnommen aus: (a) (PD 88), (b) Crystal Ball (Hi 83) (c) MARK II (Hi 83), (d) DM2 (Hi 83).

Diskussion der Ergebnisse

Zu den Resultaten für die Strahlungszerfälle aus Tabelle 7.4 sind folgende Punkte zu bemerken:

1. In Anbetracht dessen, daß wir die obigen Zerfallsbreiten parameterfrei, d.h. ohne Anpassung an experimentelle Zerfallsdaten, und einzig aus unseren berechneten (!) Mischungskoeffizienten für die $|N\rangle$, $|S\rangle$ und $|G\rangle$ Zustände in den physikalischen Teilchen erhalten, ist die Übereinstimmung der Vorhersagen mit den experimentell gemessenen Zerfallsbreiten durchweg sehr gut.

In diesem Zusammenhang ist zu bemerken, daß die experimentellen Daten teilweise recht große Unsicherheiten aufweisen. Zudem weichen die Angaben verschiedener experimenteller Gruppen zum Teil deutlich voneinander ab, sodaß Sorgfalt in der Interpretation der gemessenen Breiten geboten ist (vgl. PD 88).

2. Für die Strahlungszerfälle des ι - Teilchens, $\iota \rightarrow V\gamma$, gibt es bislang nur vage Angaben. Dennoch zeigt der Vergleich unserer berechneten Breiten mit den experimentell verfügbaren Daten, sowie mit anderen unabhängigen Vorhersagen (Ro 81, Fr 84, Fr 85, Do 84, Te 84) eine qualitative Übereinstimmung darin daß die γ -Zerfälle des ι - Teilchens für einen Glueball erstaunlich große Breiten haben.

So erhalten wir in unserem Modell für $\Gamma(\iota \rightarrow \rho\gamma) \simeq 485 \text{ KeV}$. Die Zerfallsbreite $\Gamma(\iota \rightarrow \omega\gamma)$ beträgt demgegenüber etwa $1/9$, wie man es auch im einfachen Quark-Modell erwartet (Cl 88). Die Breite $\Gamma(\iota \rightarrow \phi\gamma)$ schließlich beträgt nur etwa $1/16$ der Breite $\Gamma(\iota \rightarrow \rho\gamma)$, was vor allem durch den 'Unterdrückungsfaktor' (μ_s/μ_u) bedingt ist (2. Spalte in Tabelle 7.4).

Die große Zerfallsbreite $\Gamma(\iota \rightarrow \rho\gamma)$ ist zunächst überraschend, da wir einerseits festgestellt haben, daß das ι - Teilchen aufgrund seiner dominanten gluonischen Komponenten als Glueball angesehen werden kann, andererseits aber, wie zuvor erläutert, Glueballs nur über ihre quarkonischen Beimischungen elektromagnetisch zerfallen können.

Aus unserer Analyse wird jedoch verständlich, warum die γ - Zerfallsbreiten des ι so groß herauskommen, nämlich:

- Die Phasenraumfaktoren für die ι - Zerfälle (3. Spalte in Tabelle 7.4) sind sehr groß im Vergleich zu denen der mesonischen Zerfälle.
- Die quarkonischen Beimischungen im ι sind bedeutend und machen immerhin etwa 25% aus (vgl. Tabellen 7.1, 7.2), was sich direkt in den Zerfallsbreiten niederschlägt.

Insofern sind die recht großen elektromagnetischen Zerfallsbreiten des ι - Teilchens plausibel und können gerade deswegen als signifikantes Kennzeichen seines Glueball-Charakters angesehen werden.

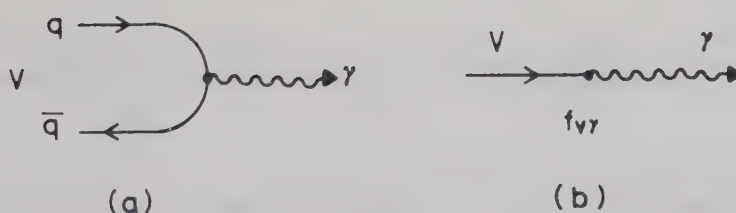
7.2.2 2 - Photon Zerfälle

Unser $(\eta - \eta' - \iota)$ - Mischungsmodell ermöglicht ebenfalls die explizite Berechnung von Zerfallsbreiten für 2 - Photon Zerfälle $P \rightarrow \gamma\gamma$ der pseudoskalaren Teilchen $P = \eta, \eta', \iota, \dots$ in zwei Photonen γ . Dazu müssen wir lediglich das im vorangegangenen Abschnitt 7.2.1 vorgestellte Konzept der Beschreibung elektromagnetischer Zerfälle

etwas erweitern.

Im Quark-Modell besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den elektromagnetischen Zerfällen $V \rightarrow P \gamma$, $P \rightarrow V \gamma$ und den 2 - Photon Zerfällen $P \rightarrow \gamma \gamma$ (vgl. z.B. (Fe 69)). Letztere werden durch die $q\bar{q}$ -Vernichtungsamplituden der quarkonischen Komponenten in den Wellenfunktionen der physikalischen Teilchen bestimmt und lassen sich mit Hilfe der *Vektor-Meson Dominanz Hypothese* (Sa 69) über die Übergangsamplituden $g_{VP\gamma}$ der elektromagnetischen Strahlungszerfälle $V \rightarrow P \gamma$ ausdrücken.

Die Amplitude für den Übergang eines Vektor-Mesons in ein Photon $V \rightarrow \gamma$ ist im Quark-Modell durch die $q\bar{q}$ -Vernichtungsamplituden der Quark-Antiquark Paare des Vektor-Mesons gegeben, wie in Figur 7.2 illustriert.



Figur 7.2 :

$V \rightarrow \gamma$ Prozeß im Quark-Modell: (a) via $q\bar{q}$ -Vernichtung, (b) Vektor-Meson Dominanz.

Der Mechanismus der gegenseitigen Vernichtung eines Fermions und eines Antifermions ist ein wohlstudierter Prozeß (z.B. Positronium) und läßt sich direkt auf Quark-Antiquark Systeme übertragen. Die Vernichtung in ein einzelnes Photon erfordert, daß sich das $q\bar{q}$ -Paar im $^3S_1$ -Zustand befindet, d.h. Quark und Antiquark müssen antiparallele Spineinstellung haben. Die Vernichtungsamplitude hängt vom Überlapp des Quarks und Antiquarks ab und ist gegeben durch

$$A((q\bar{q})_{^3S_1} \rightarrow \gamma) = 2 Q_q \frac{\Psi_{q\bar{q}}(0)}{M_{q\bar{q}}^{\frac{3}{2}}} \quad (7.18)$$

wobei $\Psi_{q\bar{q}}(0)$ der Wert der $q\bar{q}$ -Wellenfunktion für verschwindenden Relativabstand ist und $Q_q = -Q_{\bar{q}}$ die elektrische Ladung der Quarks bezeichnet ($Q_u = \frac{2}{3}, Q_d = -\frac{1}{3}, Q_s = -\frac{1}{3}$).

Um die entsprechende Amplitude für ein bestimmtes Vektor-Meson V zu erhalten, ist es notwendig über die Beiträge der verschiedenen $q\bar{q}$ -Komponenten in der Wellenfunktion des Mesons zu summieren, d.h.

$$f_{V\gamma} \equiv A(V \rightarrow \gamma) = 2 Q_V \frac{\Psi_V(0)}{M_V^{\frac{3}{2}}} \quad (7.19)$$

wobei

$$Q_V = \sum_i \langle q_i \bar{q}_i | \hat{Q}_i | V \rangle \quad (7.20)$$

Die Werte von Q_V für die Vektor-Mesonen ρ, ω, ϕ erhält man durch Auswertung von (7.20) mit den entsprechenden Wellenfunktionen, wie in Tabelle 7.5 angegeben.

Die Übergangsamplitude $f_{V\gamma}$ beschreibt die $V - \gamma$ Kopplungsstärke und hängt entscheidend vom Wert $\Psi_V(0)/M_V^{3/2}$ ab. Im Quark-Modell gilt in guter Näherung

$$\frac{f_{V\gamma}}{e} = \sqrt{2} \frac{\Psi_V(0)}{M_V^{3/2}} \cong \frac{M_\pi}{M_V} \quad (7.21)$$

sodaß die Vektor-Meson - Photon Kopplungsstärke $f_{V\gamma}$, ¹ Gl.(7.19), gegeben ist durch

$$f_{V\gamma} = \sqrt{2} Q_V \frac{M_\pi}{M_V} \quad (7.22)$$

Die resultierenden Werte für die Vektor-Mesonen ρ^0 , ω und ϕ sind in Tabelle 7.5 angegeben.

V	$ \Psi_V\rangle$	$\frac{Q_V}{e}$	$\frac{f_{V\gamma}}{e}$
ρ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}} u\bar{u} - d\bar{d}\rangle$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{M_\pi}{M_\rho}$
ω	$\frac{1}{\sqrt{2}} u\bar{u} + d\bar{d}\rangle$	$\frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{3} \frac{M_\pi}{M_\omega}$
ϕ	$ s\bar{s}\rangle$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3} \frac{M_\pi}{M_\phi}$

Tabelle 7.5 :

Eigenschaften der Vektor-Meson $\rightarrow$ Photon Übergänge im Quark-Modell: Wellenfunktionen Ψ_V , Ladungsgewichte Q_V und effektive Kopplungsstärken $f_{V\gamma}$.

¹Die 'Vektor Dominanz Kopplungsstärken' werden in der Literatur auch vielfach durch $\gamma_V/e \equiv 1/(2 f_{V\gamma})$ definiert.

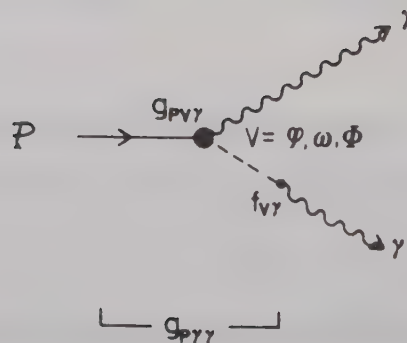
Mit Hilfe der $V - \gamma$ Vernichtungsamplituden $f_{V\gamma}$ nach Gl.(7.22) und Tabelle 7.5 kann man nun die 2 - Photon Zerfälle der pseudoskalaren Mesonen π^0 , η , η' sowie des ι - Teilchens

$$P \rightarrow \gamma + \gamma \quad (P = \pi^0, \eta, \eta', \iota) \quad (7.23)$$

in Analogie zur 2 - Photon Vernichtung des $^1S_0$ -Positroniums beschreiben.

Figur 7.3 illustriert diese Zerfälle als Zwei-Stufen Prozesse, in denen die Emission des ersten Photons via eines magnetischen Dipolübergangs $P \rightarrow V \gamma$ geschieht, wie in Abschnitt 7.2.1 diskutiert, und das zweite Photon durch die $q\bar{q}$ -Vernichtung des Vektor-Mesons emittiert wird. D.h., den Prozeß, den man eigentlich betrachtet ist

$$P \rightarrow V + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma \quad (7.24)$$



Figur 7.3 : $P \rightarrow \gamma + \gamma$ Zerfalls-Diagramm

Das *Übergangsmatrizelement* für den Zerfall $P \rightarrow \gamma \gamma$ ist analog zu Gl.(7.9) definiert und hat die Lorentz-invariante Struktur (Te 84)

$$\begin{aligned} M_{P\gamma\gamma} &= \lim_{K \rightarrow 0} \langle \gamma(K, \epsilon^{(\gamma)}) | \hat{j}_{em}^\mu(0) | P(p) \rangle \\ &= \lim_{K \rightarrow 0} g_{P\gamma\gamma}(K^2) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_\nu^{(\gamma)} K_\alpha p_\beta \end{aligned} \quad (7.25)$$

wobei K bzw. $\epsilon^{(\gamma)}$ den Vierer-Impuls bzw. Polarisationsvektor des Photons γ und p den Vierer-Impuls des Pseudoskalars P bedeuten. Die invariante Übergangsamplitude ist mit $g_{P\gamma\gamma}$ bezeichnet.

Die entsprechende *Zerfallsbreite* $\Gamma(P \rightarrow \gamma \gamma)$ schreiben wir in Anlehnung an Gl.(7.10) in der folgenden Form:

$$\Gamma(P \rightarrow \gamma \gamma) = \frac{|K|^3}{4\pi} \cdot g_{P\gamma\gamma}^2 \quad (7.26)$$

wobei in diesem Fall

$$|K| = \frac{M_P}{2} \quad (7.27)$$

der Impulsbetrag bezüglich des Schwerpunktsystems ist.

Um die Zerfallsbreiten (7.26) zu berechnen, müssen wir die Übergangsamplituden $g_{P\gamma\gamma}$ kennen. Dazu greifen wir auf oben vorgestellte Bild des $P \rightarrow \gamma \gamma$ Zerfalls via $V - \gamma$ Prozesse und schreiben in Einklang mit (7.24) und Figur 7.3 die *Übergangsamplitude* $g_{P\gamma\gamma}$ für den Zerfall $P \rightarrow \gamma \gamma$ wie folgt:

$$g_{P\gamma\gamma} = c \sum_{V=\rho,\omega,\phi} (g_{PV\gamma} \cdot f_{V\gamma}) \quad (7.28)$$

Dabei erstreckt sich die Summation über alle möglichen intermediären Vektor-Meson Zustände, mit den magnetischen Dipolübergangsamplituden $g_{PV\gamma}$ aus Abschnitt 7.2.1, Gl. (7.13), (7.15), für die Prozesse $P \rightarrow V + \gamma$ und den $V - \gamma$ Kopplungsstärken $f_{V\gamma}$ aus Tabelle 7.5 für die Prozesse $V \rightarrow \gamma$ (vgl. Figur 7.3).

Alle weiteren Schritte sind nun vollkommen analog zu den Betrachtungen der Strahlungszерfälle $P \rightarrow V + \gamma$ in Abschnitt 7.2.1:

In Anlehnung an Gl.(7.16) normieren wir die Zerfallsbreiten $\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)$ auf den Referenzwert $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ und erhalten unter Verwendung von (7.26), (7.25) und (7.15) die folgende *Formel zur Berechnung der 2 - Photon Zerfallsbreiten der pseudoskalaren Teilchen*:

$$\begin{aligned} \Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma) &= \left(\frac{M_P}{M_{\pi^0}} \right)^3 \left(\frac{g_{P\gamma\gamma}}{g_{\pi^0\gamma\gamma}} \right)^2 \times \Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \\ &= \left(\frac{M_P}{M_{\pi^0}} \right)^3 \left[\sum_{F=N,S} P_F \cdot g_{PV\gamma}^{(F)} \right]^2 \times \Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \end{aligned} \quad (7.29)$$

Hierbei sind die magnetischen Dipolübergangsamplituden $g_{PV\gamma}^{(F)}$, wie in Abschnitt 7.2.1, Gl.(7.15) diskutiert, gegeben durch

$$\begin{aligned}
g_{PV\gamma} &= \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \left[a_i^{(V)} a_j^{(P)} \langle N_i | \hat{\mu}_z | N_j \rangle + b_i^{(V)} b_j^{(P)} \langle S_i | \hat{\mu}_z | S_j \rangle \right] \\
&\equiv g_{PV\gamma}^{(N)} + g_{PV\gamma}^{(S)}
\end{aligned}
\tag{7.30}$$

und berücksichtigen die Zusammensetzung von Vektor-Meson V und Pseudoskalar P bezüglich ihrer $q\bar{q}$ -Komponenten (Grundzustände + angeregte Zustände).

Analog zu Gl.(7.16) haben wir in (7.29) die *Faktoren* P_F eingeführt, die das relative Gewicht der Amplitude des betrachteten Zerfalls bezüglich des Zerfalls $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ berücksichtigen - entsprechend der Quark-Flavour Zusammensetzung und der Ladung von Pseudoskalar P und intermediärem Vektor-Meson V. Die Wichtungsfaktoren P_F für die im folgenden betrachteten Zerfälle sind in Tabelle 7.6 angegeben.

Die *Ergebnisse unserer Berechnungen der Breiten 2 - Photon Zerfälle von η , η' und ι* mit den Formeln (7.29) und (7.30) sind in Tabelle 7.6 zusammengestellt. Als einzigen 'Input' verwenden wir den experimentellen Wert für $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = 7.86 \pm 0.54 \text{ eV}$ in Gl.(7.29). Gezeigt sind die Vorhersagen unseres Modells, Γ^{Calc} , im Vergleich zu den aktuellen experimentellen Werten, Γ^{Exp} .

Zerfall $P \rightarrow \gamma\gamma$	Relatives Gewicht		Phasenraum $\left(\frac{M_P}{M_{\pi^0}}\right)^3$	Zerfallsbreite $\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)$	
	P_N	P_S		$\Gamma^{Calc} \text{ (KeV)}$	$\Gamma^{Exp} \text{ (KeV)}$
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	1	0	1	—	$(7.86 \pm 0.54) \times 10^{-3}$
$\eta \rightarrow \gamma\gamma$	$\frac{5}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\mu_s}{\mu_u}\right)$	67.3	0.58	$0.42 \pm 0.07^{(a)}$
$\eta' \rightarrow \gamma\gamma$	$\frac{5}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\mu_s}{\mu_u}\right)$	357.4	4.37	$4.47 \pm 0.33^{(a)}$
$\iota \rightarrow \gamma\gamma$	$\frac{5}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\mu_s}{\mu_u}\right)$	1213.6	3.67	$\lesssim 3.2^{(b)}$

Tabelle 7.6 :

Berechnete 2 - Photon Zerfallsbreiten Γ^{Calc} für η , η' und ι im Vergleich zu aktuellen experimentellen Daten Γ^{Exp} . Der experimentelle Wert von $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ dient als 'Input', (vgl. Gl.(7.28)). Alle anderen Werte Γ^{Calc} sind Vorhersagen des Modells. Die zweite Spalte listet die Wichtungsfaktoren P_F ; $F = N, S$ aus Gl.(7.29), die das relative Gewicht der 'non-strange' bzw. der 'strange' Quark-Komponenten in den Übergangsamplituden für die verschiedenen Zerfälle bezüglich der Amplitude für $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ berücksichtigen. Für das Verhältnis $\left(\frac{\mu_s}{\mu_u}\right)$ verwenden wir wie zuvor den Wert des Quark-Modells, $\frac{\mu_s}{\mu_u} = \frac{m_u}{m_s} \approx \frac{350 MeV}{606 MeV}$. Die dritte Spalte gibt die Phasenraumfaktoren an.

Die experimentellen Werte Γ^{Exp} sind entnommen aus: (a) (PD 88), (b) (Cl 88). ²

² $\Gamma(\iota \rightarrow \gamma\gamma) \times B(\iota \rightarrow K \bar{K} \pi) < 1.6 KeV$, $B(\iota \rightarrow K \bar{K} \pi) \gtrsim 1/2$

Diskussion der Ergebnisse

Zu den Resultaten für die 2 - Photon Zerfälle aus Tabelle 7.6 sind folgende Bemerkungen angebracht:

1. Zunächst ist zu sagen, daß die allgemein übliche Normierung der berechneten $\gamma\gamma$ -Zerfallsbreiten von η , η' und ι auf die Breite $\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ (O'Do 81, Ro 83) im Grunde nicht besonders adäquat ist. Da nämlich die $\gamma\gamma$ -Vernichtungsamplituden durch den Wert der Wellenfunktionen der Teilchen am Ursprung bestimmt werden, wie zu Beginn von Abschnitt 7.2.2 erläutert, haben wir bei der Normierung $\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma)/\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ implizit angenommen, daß die Wellenfunktionen von π^0 und die von η , η' und ι am Ursprung dasselbe Verhalten aufweisen. Dies ist natürlich eine fragwürdige Annahme, insbesondere deswegen, als das π^0 aufgrund seines 'relativistischen' Charakters unter den pseudoskalaren Mesonen eine Sonderrolle spielt.
2. Unter diesem Gesichtspunkt, sowie in Anbetracht der Tatsache, daß wir (wie zuvor bei den Strahlungszerfällen in Abschnitt 7.2.1) die $\gamma\gamma$ -Zerfallsbreiten einzig aus den berechneten (!) Mischungskoeffizienten für die Zusammensetzung von η , η' und ι vorhersagen, sind unsere Resultate aus Tabelle 7.6 in befriedigender Übereinstimmung mit den experimentellen Breiten.

Die Zerfallsbreite $\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)$ kommt zwar etwas zu groß heraus, dagegen stimmt unsere Vorhersage für $\Gamma(\eta' \rightarrow \gamma\gamma)$ recht gut mit dem gemessenen Wert überein.

Für $\Gamma(\iota \rightarrow \gamma\gamma)$ läßt sich von experimenteller Seite bislang nur eine obere Schranke von $\leq 3.2 \text{ KeV}$ (Cl 88) angeben. Die berechnete Breite liegt

mit 3.67 KeV etwas darüber, zeigt jedoch die Größenordnung an, in der die $\gamma\gamma$ -Zerfallsbreite des ι - Teilchens liegen sollte.

Im Vergleich zu den Zerfallsbreiten von $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ und $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ erscheint der Wert für $\Gamma(\iota \rightarrow \gamma\gamma)$ für einen Glueball-Zustand zunächst ziemlich groß. Allerdings liegt der Grund für diese signifikante $\gamma\gamma$ -Breite des ι einerseits in dem großen Phasenraumfaktor für diesen Zerfallskanal (2. Spalte in Tabelle 7.5) und andererseits in den deutlichen $q\bar{q}$ -Beimischungen in der Wellenfunktion des ι , die nach Gl.(7.29) und (7.30) direkt in die Übergangsamplituden eingehen.

Auf der anderen Seite ist der obige Wert für $\Gamma(\iota \rightarrow \gamma\gamma)$ erstaunlich klein im Vergleich zu der großen Zerfallsbreite $\Gamma(\iota \rightarrow \rho\gamma)$ die, wie allgemein erwartet wird, in der Größenordnung von mehreren hundert KeV erwartet wird und die nach unseren Berechnungen in Abschnitt 7.2.1, Tabelle 7.4, etwa 500 KeV beträgt. Das ist eine hervorstechende Eigenschaft und läßt sich als ein charakteristisches Kennzeichen des ι - Teilchens verstehen (PD 88, Cl 88).

7.3 Glueball-Produktion in J/ψ Zerfällen

Im Gegensatz zu den Zerfalleigenschaften von Glueballs, für die die experimentellen, wie auch die theoretischen Erkenntnisse bislang recht vage und bruchstückhaft sind (wie wir am Beispiel des ι - Teilchens gesehen haben), besteht eine generelle Übereinstimmung in den Auffassungen über deren Produktionsmechanismen (Cl 88). In den letzten Jahren wurden viele konventionelle hadronische Streureaktionen (mit 'quarkonischen' Hadronen) intensiv erforscht und zahlreiche Resonanzen entdeckt, die als Quark-Zustände klassifiziert wurden. All diese Experimente zeigen jedoch keine klare Evidenz für Teilchen, die in erster Linie aus Valenzgluonen zusammengesetzt sind. Man erwartet daher, daß derartige gluonische Zustände vermutlich bevorzugt in Reaktionskanälen mit 'harten' Gluonen auftreten, d.h. in Prozessen, in denen die Reaktionsdynamik durch die Wechselwirkung von Gluonen dominiert und nicht, wie in den meisten hadronischen Streu- und Zerfallsprozessen, der Großteil des Reaktionsimpulses auf Quarks übertragen wird. Solche Reaktionen sind z.B. die *Proton-Antiproton Vernichtung* (wobei der Impuls der Vernichtung von $q\bar{q}$ -Paaren in Gluonen transferiert werden kann), und die *Zerfälle schwerer Mesonen wie J/ψ , ψ' , etc. .*

Insbesondere die *Zerfälle der 'Charmonium' Systeme J/ψ (3097) und ψ' (3685)*, die als gebundene Zustände eines schweren 'charm' Quark-Antiquark Paares ($c\bar{c}$) verstanden werden, spielen eine bedeutende Rolle für die Spektroskopie und die Dynamik der Hadronen. Diese Systeme zeichnen sich vor allem durch folgende Eigenschaften aus:

1. J/ψ und ψ' sind SU(3)-Flavour Singlets mit Isospin $I = 0$ und wohldefinierten Quantenzahlen $J^{PC} = 1^{--}$.
2. Als 'reine' $c\bar{c}$ -Mesonen enthalten J/ψ und ψ' keine leichten Valenzquarks u , d , s und koppeln daher nicht direkt an u -, d -, bzw. s -Quark-Zustände (OZI-Regel, Ok 63, Zw 64, Li 66).
3. J/ψ und ψ' haben mannigfaltige Strahlungszerfälle und Zerfälle in Hadronen mit signifikanten, gut beobachtbaren Verzweigungsverhältnissen.

Die Zustände J/ψ und ψ' sind $c\bar{c}$ -Zustände mit relativem Bahndrehimpuls $L_{c\bar{c}} = 0$ und zerfallen durch Vernichtung des Quark-Antiquark Paares.

Analog zum Vernichtungsprozeß des e^+e^- -Positroniums, dessen Amplitude durch den Überlapp der Wellenfunktionen von Elektron und Positron bestimmt wird, hängen die Zerfallsbreiten der $c\bar{c}$ -Systeme J/ψ und ψ' von der internen Wellenfunktion des Systems ab (Cl 88, Ko 86):

$$\Gamma({}^1S_0 \rightarrow gg) = \frac{8}{3} \frac{\alpha_s^2}{M_{c\bar{c}}^2} | R_{c\bar{c}}(0) |^2 \quad (7.31a)$$

$$\Gamma({}^3S_1 \rightarrow gg) = \frac{40}{81\pi} (\pi^2 - 9) \frac{\alpha_s^3}{M_{c\bar{c}}^2} | R_{c\bar{c}}(0) |^2 \quad (7.31b)$$

Wohingegen das e^+e^- -Positronium in Photonen zerfällt, geschehen die Zerfälle der $c\bar{c}$ -Systeme via Vernichtung in Gluonen, welche anschließend leichte Quarks und Antiquarks produzieren, die wiederum in Mesonen oder Baryonen 'hadronisieren' können.

Nach der QCD zerfällt der $^3S_1$ -Zustand des $c\bar{c}$ -Systems (wie das J/ψ oder ψ') über mindestens 3 Gluonen (daher der Faktor α_s^3 in (7.31)), oder aber in 2 Gluonen und ein einzelnes Photon (J/ψ oder ψ' sind Color-Singlets, sodaß im Endzustand kein einzelnes Gluon auftreten kann).

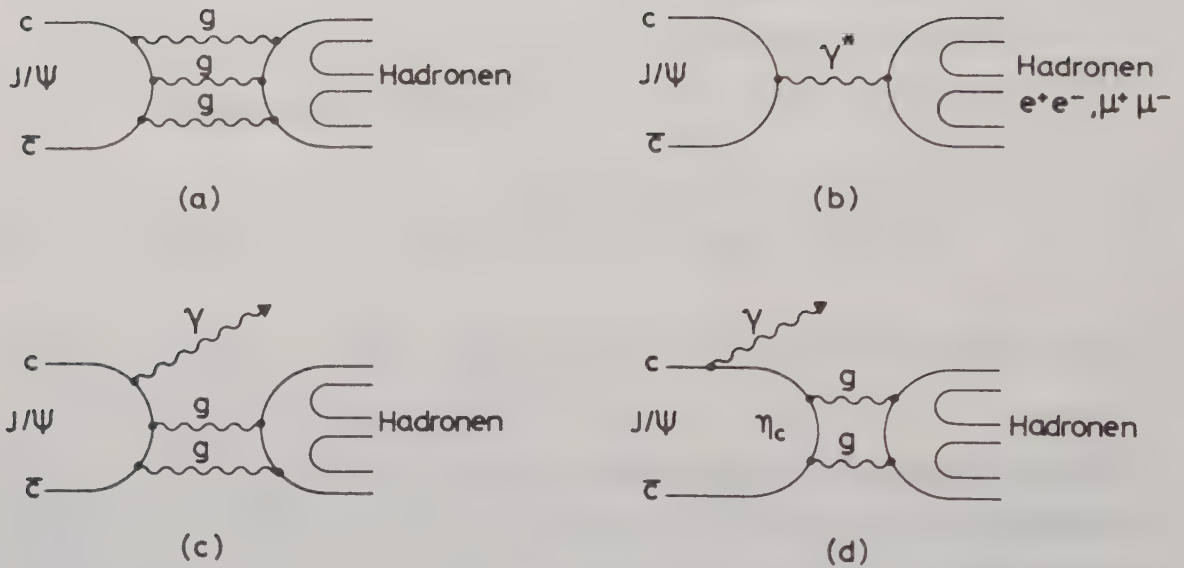
Für das Verzweigungsverhältnis dieser beiden Prozesse (vgl. Figur 7.4 (a),(c)) ergibt sich in niedrigster Ordnung QCD-Störungstheorie (Ma 81, Br 83):

$$\frac{\Gamma (J/\psi \rightarrow gg + \gamma)}{\Gamma (J/\psi \rightarrow ggg)} = \frac{16 \alpha}{\alpha_s} \left(1 + (2.2 \pm 0.6) \frac{\alpha_s}{\pi} \right) \quad (7.32)$$

Dieses Resultat stimmt sehr gut mit den experimentellen Daten überein (Ko 86).

Die Essenz dieser Betrachtung ist: Die Tatsache, daß die obigen Zerfälle so gut durch die Theorie beschrieben werden, bedeutet, erstens, daß die QCD für die Wechselwirkung verantwortlich ist und zweitens, daß die Gluonen eine wesentliche Rolle in diesen Zerfällen spielen.

Figur 7.4 illustriert die vier vermutlich am wichtigsten dynamischen Konfigurationen für die Zerfälle des J/ψ -Mesons. Diese sind: (a) Zerfall via 3-Gluon Vernichtung in zwei oder mehr Hadronen; (b) elektromagnetischer Zerfall über ein einzelnes *virtuelles* Photon in $e^+ e^-$, $\mu^+ \mu^-$ - Paare oder in Hadronen; (c) Strahlungszerfall in ein *reelles* Photon und 2 Gluonen, die anschließend hadronisieren; (d) Strahlungszerfall über einen magnetischen Dipolübergang in $\eta_c(2980)$ das wiederum über 2 Gluonen in Hadronen zerfällt.

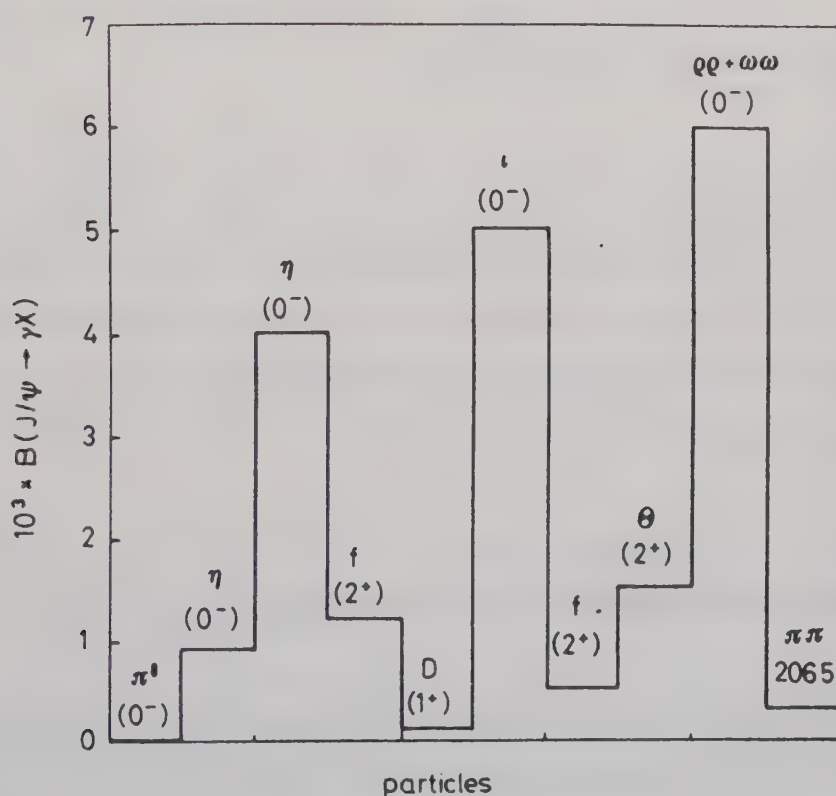


Figur 7.4 :

Die vermutlich wichtigsten Prozesse für die verschiedenen Zerfälle des J/ψ -Mesons:
 (a) 3-Gluon Vernichtung; (b) elektromagnetischer Zerfall via $c\bar{c}$ -Vernichtung in ein virtuelles Photon; (c) Strahlungszerfall in ein reelles Photon und 2 Gluonen; (d) Strahlungszerfall über einen magnetischen Dipolübergang in η_c (2980) .

Für die relativen Raten dieser vier Prozesse werden die Verhältnisse 67:23:8:2 vorhergesagt (Bl 81).

Besonders interessant sind die *Strahlungszерfälle des J/ψ* in ein Photon und ein leichtes Meson (vgl. Figur 7.4(c)), die immerhin $\approx 7\%$ der gesamten Zerfälle ausmachen. Diese Reaktionskanäle werden wie oben erläutert als Prozesse mit 'harten' Gluonen interpretiert und sind daher bevorzugte Reaktionen in denen Glueballs mit Ladungsparität $C = +$ produziert werden können, Wie wir sehen werden liefern diese Zerfälle *Aufschluß über den Anteil von gluonischen Komponenten in den Zerfallsprodukten*. Figur 7.5 zeigt das Spektrum von Resonanzen, die in den Strahlungszерfällen des J/ψ auftreten. Neben verschiedenen bekannten $q\bar{q}$ -Mesonen wird eine starke Produktion der Glueball-Kandidaten $\iota(1440)$ und $\theta(1720)$ beobachtet.



Figur 7.5 :

Resonanzproduktion in den Strahlungszерfällen des J/ψ , via dem Prozeß in Figur 7.4(c). (Nach Referenz Pa 87).

Auf der anderen Seite erwartet man von den *hadronischen Zerfällen des J/ψ* - für die in erster Linie die Prozesse in Figur 7.4(a) und 7.4(b) verantwortlich sind

und die $\approx 60 - 70 \%$ der gesamten Zerfälle betragen - daß in diesen Zerfällen ebenfalls Glueball-Zustände produziert werden.

Die naheliegendste Möglichkeit für die Erzeugung von Glueballs oder von Zuständen mit signifikanten gluonischen Beimischungen in den hadronischen Zerfällen, sind die Reaktionen $J/\psi \rightarrow P + V$ (P = Pseudoskalare π, η, η', ι ; V = Vektor-Mesonen ρ, ω, ϕ).

Wie wir sehen werden geben diese Zerfälle *Aufschluß über die rein quarkonischen Anteile in den pseudoskalaren Teilchen des Zerfallsprodukts* und damit indirekt auch über mögliche gluonische Beimischungen.

In den folgenden Abschnitten 7.3.1 und 7.3.2 werden wir die Strahlungszerfälle $J/\psi \rightarrow P + \gamma$, sowie die hadronischen Zerfälle $J/\psi \rightarrow P + V$ (P = Pseudoskalar, V = Vektor) im Rahmen unseres $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischungsmodells beschreiben und Vorhersagen über verschiedene Zerfallsbreiten machen.

7.3.1 Glueball-Produktion in den Strahlungszerfällen $J/\psi \rightarrow P + \gamma$

Die Strahlungszerfälle des J/ψ erfordern die Vernichtung des $c\bar{c}$ -Paares in Photonen und Gluonen, wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert und in Figur 7.4 illustriert. Das Verhältnis der Breiten für die Prozesse $J/\psi \rightarrow \gamma gg$ (Figur 7.4(c)) und $J/\psi \rightarrow ggg$ (Figur 7.4(a)) ergibt in niedrigster Ordnung QCD-Störungstheorie nach Gl.(7.32) mit $\alpha_s \simeq 0.2$ die Vorhersage

$$\frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma gg)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow ggg)} \approx 13\% \quad (7.33)$$

und impliziert eine Verzweigungsrate ¹ für die 2-Gluon Prozesse von (Ko 86)

$$B(J/\psi \rightarrow \gamma gg) \approx 9\% \quad (7.34)$$

Dieser Wert stimmt ausgezeichnet mit experimentellen Daten überein, die auf eine Rate von $B^{Exp}(J/\psi \rightarrow \gamma gg) \approx 10\%$ schließen lassen. Das wird als starkes Indiz dafür angesehen, daß $J/\psi \rightarrow \gamma gg$ der dominante Prozeß in den Strahlungszерfällen des J/ψ ist. Folglich sollten diese 'Gluon-reichen' Zerfälle ausgezeichnete Reaktionskanäle für die Suche nach Glueballs mit positiver Ladungsparität ($C=+$) sein.

So stützt sich z.B. die Interpretation des $\iota(1440)$ mit $J^{PC} = 0^{-+}$ als potentieller Glueball-Kandidat in erster Linie auf das erstaunlich große Verzweigungsverhältnis

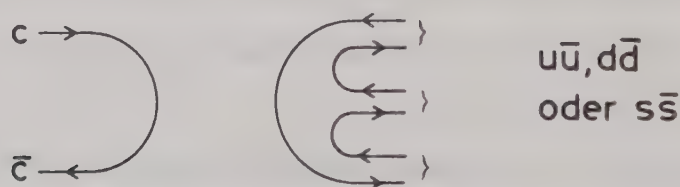
$$B(J/\psi \rightarrow \iota \gamma) = (4.7 \pm 0.6) \cdot 10^{-3} \quad (7.35)$$

welches das deutlichste Signal aller Strahlungszерfälle des J/ψ in leichte Mesonen ist (einzig der Zerfall in das schwere $\eta_c(2980)$, $J/\psi \rightarrow \eta_c \gamma$, hat noch eine größere Rate).

Ein weiteres Argument dafür, daß die Prozesse $c\bar{c} \rightarrow gg + \gamma$ in den Strahlungszерfällen des J/ψ dominant sein sollten liefert die *OZI (Okubo-Zweig-Iizuka) - Regel*

$$^1 B(J/\psi \rightarrow X) = \Gamma(J/\psi \rightarrow X) / \Gamma(J/\psi \rightarrow \text{alle Endprodukte})$$

(Ok 63, Zw 64, Li 66), die zwar eine empirische Erkenntnis ist, jedoch insbesondere für die Zerfälle der $c\bar{c}$ -Mesonen außerordentlich gut erfüllt ist. Die OZI-Regel besagt im wesentlichen, daß Reaktionen (der starken Wechselwirkung), in denen die Endzustände nur über Vernichtung von Quark-Antiquark Paaren ablaufen können, stark behindert sind. Stellt man die an der Reaktion beteiligten Quarks und Antiquarks als ein-, bzw. auslaufende Linien dar, so bedeutet dies, daß Prozesse, in denen sich die Quarks und Antiquarks im Anfangs- und Endzustand nicht durch durchgehende Linien verbinden lassen, deutlich unterdrückt sein sollten. Dies ist in Figur 7.6 illustriert.



Figur 7.6 :

Die Reaktionen $c\bar{c} \rightarrow u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$ sind 'OZI verboten', da sich die Quarks und Antiquarks im Anfangs- und Endzustand nicht durch durchgehende Linien verbinden lassen. Diese Prozesse sind tatsächlich stark unterdrückt.

In diesem Sinne sind die Zerfälle der $c\bar{c}$ -Mesonen in leichte Mesonen mit nur $u -$, $d -$, $s -$ Quarks 'OZI verboten'. Sie erfordern die Vernichtung des $c\bar{c}$ -Paares in Gluonen und die anschließende Erzeugung von $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, bzw. $s\bar{s}$ -Paaren (vgl. Figur 7.4).

Für die folgende Analyse der Strahlungszerfälle des J/ψ im Rahmen unseres $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischungsmodells bedeutet die OZI-Regel folgendes:

In unserem Mischungsmodell aus Abschnitt 7.1 sind die pseudoskalaren Teilchen η , η' und ι entsprechend Tabelle 7.1(a) aus 'non-strange', 'strange' und rein gluonischen Anteilen zusammengesetzt. Die Strahlungszerfälle des J/ψ -Mesons in η , η' oder ι , $J/\psi \rightarrow P + \gamma$, ($P = \eta, \eta', \iota$), implizieren daher die Übergänge

$$c\bar{c} \rightarrow \begin{cases} u\bar{u}, d\bar{d} \\ s\bar{s} \\ gg \end{cases} \quad (7.36)$$

Diese Prozesse sind aber 'OZI verboten' und können nur via $c\bar{c}$ -Vernichtung in z.B. zwei Gluonen stattfinden, d.h.

$$c\bar{c} \rightarrow gg \rightarrow \begin{cases} u\bar{u}, d\bar{d} \\ s\bar{s} \\ gg \end{cases} \quad (7.37a)$$

oder in graphischer Darstellung

(7.37b)

Daher erwartet man, daß der Übergang $c\bar{c} \rightarrow gg$ geringer unterdrückt sein sollte (auch als ' $\sqrt{OZI}$ unterdrückt' bezeichnet) als die 'OZI verbotenen' Prozesse $c\bar{c} \rightarrow u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $s\bar{s}$ und folglich deutlich dominant sein müßte (Ro 78).

Mit anderen Worten, die Untersuchung der Strahlungszerfälle $J/\psi \rightarrow \gamma + \text{Hadronen}$, spielt eine zentrale Rolle für die Erkennung von Glueballs. Sie ermöglichen einen direkten Test für die Präsenz gluonischer Beimischungen in den Zerfallsprodukten.

Im folgenden werden wir die Strahlungszerfälle des J/ψ -Mesons in die pseudoskalaren Teilchen η , η' und ι , $J/\psi \rightarrow P + \gamma$, basierend auf den Ergebnissen unseres Mischungsmodells aus Abschnitt 7.1 berechnen und durch Vergleich mit experimentellen Daten überprüfen, inwieweit die Vorhersagen des Modells plausibel sind.

Berechnung der Zerfälle $J/\psi \rightarrow \eta\gamma, \eta'\gamma, \iota\gamma$

Um die Zerfälle $J/\psi \rightarrow P + \gamma$ entsprechend Figur 7.4(c) und den Prozessen (7.37) im Rahmen der $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischung quantitativ beschreiben zu können, machen wir die vereinfachende Annahme, daß wir das intermediäre gg -Paar in (7.37) als *gebundenen* gg -Zustand ansehen. Wir setzen also implizit voraus, daß die beiden Gluonen auf der Massenschale produziert werden, d.h. *reelle* Gluonen sind und daß Beiträge von *virtuellen* Gluonen vernachlässigt werden können. Zum einen sollte dieser Prozeß nach dem gegenwärtigen Verständnis den Hauptbeitrag der J/ψ -Strahlungszerfälle ausmachen und zum anderen brauchen wir unter obiger Annahme keine zusätzlichen Parameter einzuführen.

In diesem Bild sind dann die Verhältnisse der Zerfallsbreiten $\Gamma(J/\psi \rightarrow P\gamma)$ ein Maß für die rein gluonischen gg -Komponenten in den Wellenfunktionen von $P = \eta, \eta', \iota$.

Für die *Zerfallsbreiten* schreiben wir analog zu Gl.(7.10)

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow P\gamma) = \frac{1}{3} \frac{|K|^3}{4\pi} \cdot g_{J/\psi P\gamma}^2 \quad (7.38)$$

wobei

$$K = \frac{M_{J/\psi}^2 - M_P^2}{2 M_{J/\psi}} \quad (7.39)$$

der Impuls des Photons im Schwerpunktsystem und $g_{J/\psi P\gamma}$ die invariante Übergangsamplitude ist.

An dieser Stelle implementieren wir die obige Annahme, indem wir ansetzen:

$$\begin{aligned} g_{J/\psi P\gamma}^2 \propto g_{ggP}^2 &\equiv \left| \sum_i \langle G_i | P \rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_i c_i^{(P)} \right|^2 \end{aligned} \quad (7.40)$$

Dabei sind die $c_i^{(P)}$ die Mischungskoeffizienten aus Abschnitt 7.1.1, Gl.(7.3) und Tabelle 7.1(a), die den Anteil der gluonischen Beimischungen in den Zuständen $|P\rangle = |\eta\rangle, |\eta'\rangle, |\iota\rangle$ angeben.

Wir nehmen also in Einklang mit den vorangegangenen Betrachtungen an, daß die Übergangsamplitude $g_{J/\psi P\gamma}$ proportional zu den gluonischen gg -Komponenten in den Wellenfunktionen der pseudoskalaren Teilchen P ist.

Um eine Skala festzusetzen, legen wir die Verzweigungsrate für den gut gemessenen Zerfall $J/\psi \rightarrow \eta' \gamma$ als Referenzwert zugrunde und erhalten mit (7.38)-(7.40) für die anderen Zerfälle folgende *Formel zur Berechnung der Verzweigungsverhältnisse*:²

$$B(J/\psi \rightarrow P \gamma) = \left(\frac{M_{J/\psi}^2 - M_P^2}{M_{J/\psi}^2 - M_{\eta'}^2} \right)^3 \cdot \left[\frac{g_{gg P}}{g_{gg \eta'}} \right]^2 \times B(J/\psi \rightarrow \eta' \gamma) \quad (7.41a)$$

wobei

$$\left[\frac{g_{gg P}}{g_{gg \eta'}} \right]^2 = \left| \frac{\sum_i c_i^{(P)}}{\sum_i c_i^{(\eta')}} \right|^2 \quad (7.41b)$$

Hierin setzen wir für die $c_i^{(P)}$ und $c_i^{(\eta')}$ die Werte aus Tabelle 7.1(a), die wir in Abschnitt 7.1.1 mit unserem $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischungsansatz berechnet haben.

Die Resultate sind in Tabelle 7.7 aufgelistet und den aktuellen experimentellen Daten gegenübergestellt. Als Nominalwert ist $B(J/\psi \rightarrow \eta' \gamma) = (4.2 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}$ (PD 88) zugrunde gelegt. Die anderen Raten B^{Calc} sind Vorhersagen.

² $B(J/\psi \rightarrow P \gamma) = \Gamma(J/\psi \rightarrow P \gamma) / \Gamma(J/\psi \rightarrow \text{alle Endprodukte})$

Zerfall $J/\psi \rightarrow P \gamma$	Phasenraum gg - Gehalt		Verzweigungsrate $B(J/\psi \rightarrow P \gamma)$	
	$\left(\frac{K_P}{K_{\eta'}}\right)^3$	$\left(\frac{g_{gg P}}{g_{gg \eta'}}\right)^2$	$B^{Calc} (\cdot 10^{-3})$	$B^{Exp} (\cdot 10^{-3})$
$J/\psi \rightarrow \eta \gamma$	1.23	0.125	0.646	0.86 ± 0.08
$J/\psi \rightarrow \eta' \gamma$	1	1	<u>4.2</u>	<u>4.2 ± 0.4</u>
$J/\psi \rightarrow \iota \gamma$	0.65	4.01	10.98	4.7 ± 0.6

Tabelle 7.7 :

Produktion von η , η' und ι in den Strahlungszerfällen des J/ψ -Mesons. Gezeigt sind die Verzweigungsraten B^{Calc} , die sich aus den Anteilen der gluonischen Komponenten in η , η' und ι entsprechend unseres Mischungsmodells ergeben. Im Vergleich dazu, die aktuellen experimentellen Daten B^{Exp} .

Der experimentelle Wert von $B(J/\psi \rightarrow \eta' \gamma)$ dient als Referenzwert zur Festlegung der Skala,(vgl. Gl.(7.41)). Die anderen Werte B^{Calc} sind Vorhersagen des Modells. Die zweite Spalte gibt die Phasenraumfaktoren an. In der dritten Spalte sind die Verhältnisse der effektiven Anteile von rein gluonischen Komponenten in den Zuständen von $P = \eta, \iota$ bezüglich η' aufgeführt.

Die experimentellen Werte B^{Exp} sind entnommen aus Referenz PD 88.

Diskussion der Ergebnisse

Die Übereinstimmung zwischen den Modellvorhersagen B^{Calc} und den experimentellen Verzweigungsraten B^{Exp} ist eher mäßig. Insbesondere der berechnete Wert für $J/\psi \rightarrow \iota \gamma$ ist um einen Faktor 2 zu groß. Dies mag zweierlei Gründe haben:

1. Die Anteile von gluonischen Komponenten im ι -Teilchen, die wir aus der $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischung in Abschnitt 7.1 bestimmt haben, sind zu groß und das ι ist in Wirklichkeit nicht vorwiegend ein Glueball, d.h. kein Zustand mit dominantem gg -Gehalt.

Dem widerspricht allerdings, daß das ι -Teilchen vorwiegend in den 'gluonreichen' J/ψ -Zerfällen mit sehr großer Produktionsrate erzeugt wird und hingegen in konventionellen hadronischen Reaktionen nicht beobachtet wird.

Außerdem haben wir in Abschnitt 7.2 eine hervorragende Übereinstimmung zwischen experimentellen Daten und der mit den Ergebnissen unseres $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischungsmodells berechneten γ -Zerfälle der leichten Mesonen gefunden (vgl. Tabellen 7.4, 7.6). Dies läßt darauf schließen, daß unsere Resultate für die $q\bar{q}$ - und gg -Zusammensetzung von η, η' und ι ziemlich realistisch sind.

2. Die Näherung, daß die intermediäre Erzeugung von Gluonen in den Zerfällen $J/\psi \rightarrow P \gamma$ mit der Produktion eines gebundenen gg -Zustands zweier realer Gluonen identifiziert wird, ist zu einfach. Möglicherweise spielen Wechselwirkungsprozesse höherer Ordnung und Quantenfluktuationen eine nicht vernachlässigbare Rolle.

In Anbetracht dieser Ungewißheiten und mangels detaillierterer Kenntnis der Reaktionsdynamik sind die obigen Ergebnisse mehr als qualitative Abschätzung zu ver-

stehen. Dennoch wird deutlich, daß eine große Produktionsrate in den Strahlungszерfällen des J/ψ in der Tat als sensitives Kennzeichen für die Anteile gluonischer Beimischungen in den Endzuständen interpretiert werden kann und daß das oben erläuterte Bild der Zerfallsmechanismen zumindest im Ansatz richtig ist.

7.3.2 Glueball-Produktion in den hadronischen Zerfällen $J/\psi \rightarrow P + V$

Nach den Betrachtungen zu Beginn von Abschnitt 7.3 sind die Zerfälle $J/\psi \rightarrow \text{Hadronen}$ neben den Strahlungszерfällen des J/ψ sind die ebenfalls 'Gluon-reiche' Reaktionskanäle, in denen die Produktion von Glueball-Zuständen signifikant sein sollte. Die Prozesse $J/\psi \rightarrow \text{Hadronen}$ machen mit 60 – 70 % den Hauptanteil aller J/ψ -Zerfälle aus und sind experimentell intensiv untersucht worden.

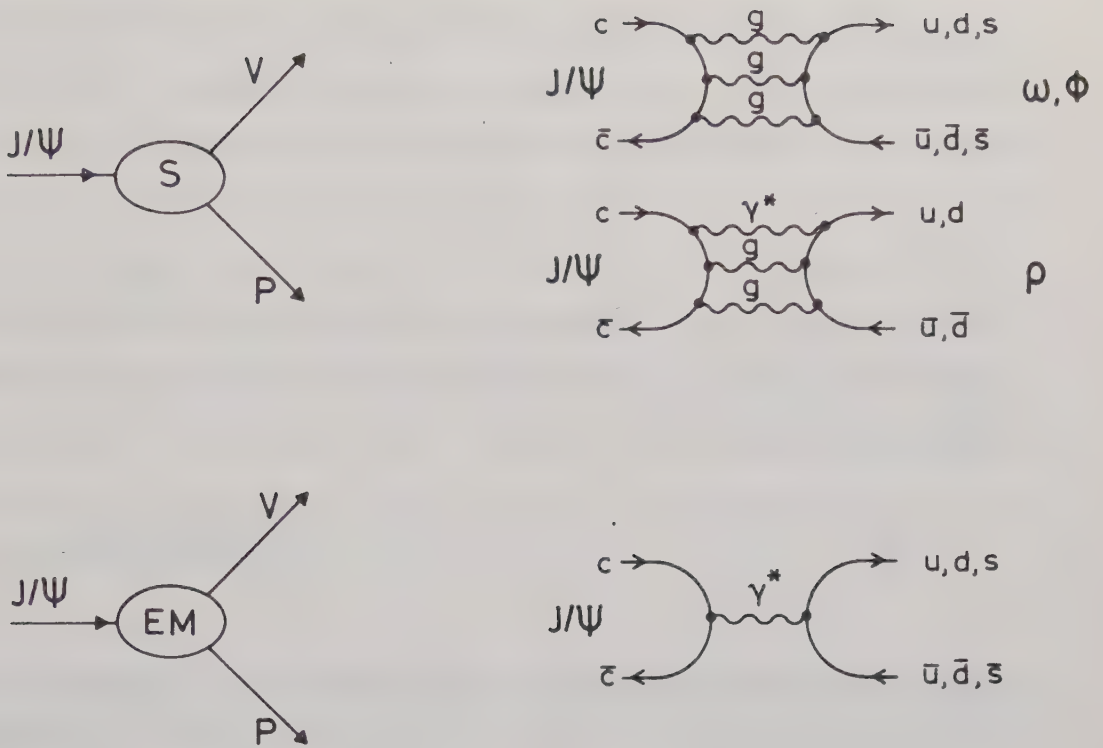
Wir wollen im folgenden die Zerfälle des J/ψ in pseudoskalare Teilchen und Vektor-Mesonen, $J/\psi \rightarrow P + V$ phänomenologisch beschreiben und im Rahmen unseres $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischungsmodells zumindest qualitative Vorhersagen über die Produktion des ι -Teilchens in diesen Zerfällen machen. Diese Analyse ist insofern von Bedeutung, als zum einen das ι -Teilchen aufgrund der großen Produktionsraten in den J/ψ -Strahlungszерfällen als Glueball-Kandidat angesehen wird (vgl. Abschnitt 7.3.1), zum anderen aber bislang keine experimentellen Daten zur ι -Produktion in den Zerfällen $J/\psi \rightarrow \iota + \rho$, $J/\psi \rightarrow \iota + \omega$, $J/\psi \rightarrow \iota + \phi$ existieren.

Im Gegensatz zu den J/ψ -Strahlungszерfällen, die wie wir gesehen haben, ein Maß

für die Anteile gluonischer Komponenten in den Endzuständen angeben, werden die Zerfälle $J/\psi \rightarrow P + V$ entscheidend durch die Quark-Zusammensetzung der Zerfallsprodukte bestimmt. Indem wir für die Pseudoskalar η, η', ι die in Abschnitt 7.1 berechneten 'non-strange' und 'strange' Quark-Anteile zur Beschreibung dieser Zerfälle heranziehen, können wir die Zerfallsbreiten auf der Grundlage unseres Mischungsmodells vorhersagen. Damit erhalten wir, durch Vergleich mit experimentellen Werten, einen Maßstab dafür, wie akkurat das Modell auf die mesonischen J/ψ Zerfälle anwendbar ist und inwieweit dessen Vorhersagen für bisher noch nicht gemessene Reaktionen glaubwürdig sind.

Die beiden Prozesse, die für die hadronischen Zerfälle vermutlich die wichtigste Rolle spielen, sind, wie zu Beginn von Abschnitt 7.3 erläutert, die Vernichtung des $c\bar{c}$ -Paares in 3 Gluonen (Figur 7.4(a)) und die $c\bar{c}$ -Vernichtung in ein virtuelles Photon (Figur 7.4(b)).

Da man die genaue Struktur der Kopplung zwischen J/ψ und den hadronischen Endzuständen nicht kennt, werden diese Zerfälle in der Regel durch phänomenologische Ansätze für die Wechselwirkung zwischen Anfangs- und Endzuständen beschrieben. Dazu nimmt man an, daß die Kopplung der hadronischen Zustände im wesentlichen auf zwei grundlegende Anteile, nämlich der starken Wechselwirkung einerseits und der elektromagnetischen Wechselwirkung andererseits, zurückführbar ist (vgl. z.B. Ok 76, Ko 76, Ru 76, Pa 78, Ba 85, Ha 85). Dies ist in Figur 7.7 illustriert.



Figur 7.7 :

Die zwei wesentlichen Kopplungen zwischen J/ψ und den mesonischen Endzuständen in den Zerfällen $J/\psi \rightarrow P + V$ (P = Pseudoskalar, V = Vektor-Meson), sowie nebenstehend, die vermutlich dominanten zugrundeliegenden QCD-Prozesse der J/ψ -Vektor Kopplung:

(a) *Starke Wechselwirkung (S)* : $c\bar{c}$ -Vernichtung in 3 Gluonen, bzw. in 2 Gluonen und ein virtuelles Photon, und anschließende Fragmentation in leichte Quark-Antiquark Paare.

(b) *Elektromagnetische Wechselwirkung (EM)* : $c\bar{c}$ -Vernichtung in ein einzelnes virtuelles Photon, das wiederum Endzustände mit leichten Quark-Antiquark Paaren erzeugt.

In diesem Bild können wir trotz der Unkenntnis der detaillierten Struktur der Wechselwirkung die $J/\psi \rightarrow P + V$ Zerfälle auf der Grundlage unseres Modells quantitativ beschreiben. Dazu greifen wir auf den phänomenologischen Ansatz von Okubo (Ok 76) zurück, der auf der 'Vektor Dominanz Hypothese' des Quark-Modells (Sa 69) basiert.

Im Sinne der in Figur 7.7 illustrierten Aufspaltung der hadronischen Wechselwirkung in einen 'starken' und einen 'elektromagnetischen' Anteil, geht man von einem effektiven Hamiltonian aus

$$\hat{H}_\psi = \hat{J}_\mu(x) \hat{\psi}^\mu(x) \equiv \left[\hat{j}_\mu^{(S)}(x) + \hat{j}_\mu^{(EM)}(x) \right] \hat{\psi}^\mu(x) \quad (7.42)$$

der die Wechselwirkung des J/ψ (repräsentiert durch das Feld $\hat{\psi}^\mu$) mit den hadronischen Endzuständen durch die Ströme $\hat{j}_\mu^{(S)}$ und $\hat{j}_\mu^{(EM)}$ beschreibt.

Für den *starken Strom* $\hat{j}_\mu^{(S)}$ macht man in Anlehnung an das 'Vektor Dominanz Modell' den Ansatz

$$\hat{j}_\mu^{(S)}(x) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \hat{j}_\mu^{(0)}(x) + \beta \hat{j}_\mu^{(8)}(x) \quad (7.43)$$

mit einer Singlett Komponente $\hat{j}_\mu^{(0)}$ und einer Oktett Komponente $\hat{j}_\mu^{(8)}$ bezüglich des üblichen Nonets von SU(3)-Vektorströmen $\hat{j}_\mu^{(a)}$; ($a = 0, 1, \dots, 8$). Ausgedrückt über die verschiedenen Quark-Felder, sind diese gegeben durch

$$\hat{j}_\mu^{(a)}(x) = \sum_{ij} \hat{\bar{q}}_i(x) \hat{\lambda}_{ij}^{(a)} \gamma_\mu \hat{q}_j(x) \quad (7.44)$$

mit $i, j = u, d, s$ und $a = 0, 1, \dots, 8$.

Der *elektromagnetische Strom* $\hat{j}_\mu^{(EM)}$ hat dagegen die allgemeine Form (Sa 69)

$$\hat{j}_\mu^{(EM)}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \left(\hat{j}_\mu^{(3)}(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{j}_\mu^{(8)}(x) \right) \quad (7.45)$$

mit einer SU(3)-Triplett Komponente $\hat{j}_\mu^{(3)}$ und einer Oktett Komponente $\hat{j}_\mu^{(8)}$.

Die Parameter α , β in (7.43), sowie γ in (7.45) werden als Konstanten betrachtet und repräsentieren die Stärke der Kopplung von J/ψ an die Singlett- und Oktett-Ströme der starken Wechselwirkung, bzw. die Stärke der elektromagnetischen Kopplung (Die Faktoren $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ vor α bzw. γ wurden lediglich aus rechen-technischen Gründen eingeführt).

Mit den Darstellungen (7.43) und (7.45) nimmt der Hamiltonian (7.42) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \hat{H}_\psi = & \left[\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \hat{j}_\mu^{(0)}(x) + \beta \hat{j}_\mu^{(8)}(x) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{3}}{2} \gamma \left(\hat{j}_\mu^{(3)}(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{j}_\mu^{(8)}(x) \right) \right] \hat{\psi}^\mu(x) \end{aligned} \quad (7.46)$$

Die ersten beiden Terme beschreiben hierbei den Effekt der starken Wechselwirkung, wohingegen der Term proportional γ die Photon-induzierte, elektromagnetische Wechselwirkung $J/\psi \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{Hadronen}$ repräsentiert. Wäre die SU(3) eine exakte Symmetrie und J/ψ ein reines SU(3)-Singlett, dann müßte $\beta = 0$ gelten. Die experimentell ermittelten J/ψ -Zerfallsraten widersprechen jedoch diesem Bild und implizieren eine Verletzung der SU(3)-Symmetrie, deren Effekt in Gl.(7.43) und

(7.46) durch den symmetriebrechenden Term proportional $\beta \neq 0$ berücksichtigt wird.

Basierend auf dem phänomenologischen Ansatz in (7.42) und (7.46) für die hadronische Wechselwirkung des J/ψ , können wir nun die uns interessierenden J/ψ -Zerfälle in ein pseudoskalares Teilchen P und ein Vektor-Meson V , $J/\psi \rightarrow P + V$, unter Verwendung der Ergebnisse unseres $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischungsmodells aus Abschnitt 7.1 berechnen.

Das *Übergangsmatrizelement* für diese Zerfälle, $M_{J/\psi VP}$, läßt sich in der folgenden allgemeinen Form darstellen (Ok 76):

$$\begin{aligned} M_{J/\psi VP} &= \langle V^{(a)}(K', \epsilon^{(V)}) P^{(b)}(K) | \hat{j}_\mu^{(c)}(0) | 0 \rangle \\ &= 3 d_{abc} g_{J/\psi VP}(q^2) \epsilon_{\mu\nu\lambda\tau} \epsilon_\nu^{(V)}(K') K'_\lambda K_\tau \end{aligned} \quad (7.47)$$

Hierbei bezeichnen K und K' die Vierer-Impulse von Pseudoskalar P bzw. Vektor V , $\epsilon_\nu^{(V)}(K')$ den Polarisationsvektor des Vektor-Mesons, $g_{J/\psi VP}$ die invariante Übergangsamplitude und $q^2 = -(K' + K)^2 = M_{J/\psi}^2$. Die Indizes a, b, c laufen von 0, 1, ..., 8 und die Lorentz-Indizes μ, ν, λ, τ von 0, ..., 3.

Die *Zerfallsbreite* ist dann analog zu (7.10) und (7.38) gegeben durch

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow VP) = \frac{1}{3} \frac{|K|^3}{4\pi} \cdot g_{J/\psi VP}^2 \quad (7.48)$$

wobei

$$|K| = \frac{[M_{J/\psi}^2 - (M_V + M_P)^2]^{1/2} [M_{J/\psi}^2 - (M_V - M_P)^2]^{1/2}}{2 M_{J/\psi}} \quad (7.49)$$

der Impuls des Pseudoskalars P bezüglich des Schwerpunktsystems ist und der Faktor $\frac{1}{3}$ in (7.49) von der Mittelung über die Polarisationen des J/ψ im Anfangszustand herrührt.

Die entsprechenden *Verzweigungsraten* sind definiert als

$$B(J/\psi \rightarrow VP) = \frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow VP)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow \text{alle Endzustände})} \quad (7.50)$$

Die *Übergangsamplituden* $g_{J/\psi VP}$ für die verschiedenen Zerfälle $J/\psi \rightarrow VP$ erhält man mit (7.48) und (7.43)-(7.45) durch eine übliche $SU(3)$ Rechnung (vgl. z.B. Pa 78, Ha 85), wozu allerdings folgende Punkte zu bemerken sind:

- An dieser Stelle bauen wir unser Modell aus Abschnitt 7.1 ein, indem wir für die pseudoskalaren Zustände $P = \eta, \eta', \iota$ die Darstellung (7.3) aus Abschnitt 7.1.2 verwenden:

$$|P\rangle = \sum_{i=1}^6 a_i^{(P)} |N\rangle_i + \sum_{i=1}^6 b_i^{(P)} |S\rangle_i + \sum_{i=1}^6 c_i^{(P)} |G\rangle_i \quad (7.51)$$

welche die Zusammensetzung der Zustände $|P\rangle$ bezüglich ihrer 'non-strange', 'strange' und rein gluonischen Anteile beschreibt (Grundzustände + radiale Anregungen!) Für die Mischungskoeffizienten $a_i^{(P)}, b_i^{(P)}, c_i^{(P)}$ werden wir die Ergebnisse unseres $\eta - \eta' - \iota$ Mischungsansatzes aus Abschnitt 7.1, Tabelle 7.1(a) einsetzen.

- Die Vektor-Mesonen $V = \rho, \omega, \phi$ beschreiben wir wie zuvor als reine Quark-Zustände entsprechend dem Quark-Modell, d.h. wir nehmen für ω und ϕ

'ideale Mischung' an, sodaß ρ und ω reine 'non-strange' Zustände und ϕ ein reines 'strange' Meson ist.

Die aus dieser Vorgehensweise resultierenden Amplituden $g_{J/\psi VP}$ für die hier interessierenden Zerfälle sind in Tabelle 7.8 zusammengestellt.

Tabelle 7.8 : (nachfolgende Seite)

Relative Kopplungsstärken für die Zerfälle $J/\psi \rightarrow VP$ und die daraus resultierenden Übergangsamplituden $g_{J/\psi VP}$ in Gl.(7.48), (7.49) (bis auf einen gemeinsamen Phasenfaktor).

Für die pseudoskalaren Zustände $P = \eta, \eta', \iota$ verwenden wir die Darstellung (7.3), bzw. (7.52), welche die Zusammensetzung dieser Zustände bezüglich ihrer 'non-strange', 'strange' und rein gluonischen Anteile beschreibt. Die Quadrate der Größen $|\sum_i a_i^{(P)}|$ und $|\sum_i b_i^{(P)}|$ repräsentieren den effektiven Anteil von 'nonstrange', bzw. 'strange' $q\bar{q}$ -Komponenten (Grundzustände + radiale Anregungen).

Die Vektor-Mesonen $V = \rho, \omega, \phi$ sehen wir als reine Quark-Zustände entsprechend dem Quark-Modell an, wobei wir für ω und ϕ 'ideale Mischung' voraussetzen. D.h., ρ und ω sind reine 'non-strange' Zustände und ϕ ein reines 'strange' Meson.

Außerdem setzen wir 'Nonet-Symmetrie' voraus (vgl. z.B. Sa 69, Fe 69).

Zerfall $J/\psi \rightarrow VP$	Kopplungsstärken			Übergangsamplitude $ g_{J/\psi VP} $
	α	β	γ	
$\rho^+ \pi^-$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	$ \alpha + 2\beta + \gamma $
$\rho^- \pi^+$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	$ \alpha + 2\beta + \gamma $
$\rho^0 \pi^0$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	$ \alpha + 2\beta + \gamma $
$K^{*+} K^-$	1	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	$ \alpha - \beta + \gamma $
$K^{*-} K^+$	1	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}$	$ \alpha - \beta + \gamma $
$K^{*0} \bar{K}^0$	1	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3}$	$ \alpha - \beta - 2\gamma $
$\bar{K}^{*0} K^0$	1	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3}$	$ \alpha - \beta - 2\gamma $
$\omega \pi^0$	0	0	1	$ 3\gamma $
$\phi \eta$	$ \sum_i b_i^{(\eta)} $	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_i b_i^{(\eta)} $	$-\frac{2}{3} \sum_i b_i^{(\eta)} $	$ \alpha - 4\beta - 2\gamma \cdot \sum_i b_i^{(\eta)} $
$\omega \eta$	$ \sum_i a_i^{(\eta)} $	$\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_i a_i^{(\eta)} $	$\frac{1}{3} \sum_i a_i^{(\eta)} $	$ \alpha + 2\beta + \gamma \cdot \sum_i a_i^{(\eta)} $
$\rho^0 \eta$	0	0	$ \sum_i a_i^{(\eta)} $	$ 3\gamma \cdot \sum_i a_i^{(\eta)} $
$\phi \eta'$	$ \sum_i b_i^{(\eta')} $	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_i b_i^{(\eta')} $	$-\frac{2}{3} \sum_i b_i^{(\eta')} $	$ \alpha - 4\beta - 2\gamma \cdot \sum_i b_i^{(\eta')} $
$\omega \eta'$	$ \sum_i a_i^{(\eta')} $	$\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_i a_i^{(\eta')} $	$\frac{1}{3} \sum_i a_i^{(\eta')} $	$ \alpha + 2\beta + \gamma \cdot \sum_i a_i^{(\eta')} $
$\rho^0 \eta'$	0	0	$ \sum_i a_i^{(\eta')} $	$ 3\gamma \cdot \sum_i a_i^{(\eta')} $
$\phi \iota$	$ \sum_i b_i^{(\iota)} $	$-\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_i b_i^{(\iota)} $	$-\frac{2}{3} \sum_i b_i^{(\iota)} $	$ \alpha - 4\beta - 2\gamma \cdot \sum_i b_i^{(\iota)} $
$\omega \iota$	$ \sum_i a_i^{(\iota)} $	$\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_i a_i^{(\iota)} $	$\frac{1}{3} \sum_i a_i^{(\iota)} $	$ \alpha + 2\beta + \gamma \cdot \sum_i a_i^{(\iota)} $
$\rho^0 \iota$	0	0	$ \sum_i a_i^{(\iota)} $	$ 3\gamma \cdot \sum_i a_i^{(\iota)} $

Als nächstes müssen wir die Parameter α , β , γ festlegen, welche die Stärke der verschiedenen SU(3)-Kopplungen zwischen J/ψ und den VP-Endzuständen beschreiben. Dazu passen wir die Übergangsamplituden $g_{J/\psi VP}$ aus Tabelle 7.8, bzw. die sich damit via (7.49) und (7.51) ergebenden Verzweigungsraten $B(J/\psi \rightarrow VP)$, an die entsprechenden experimentell bestimmten Werte an. In Tabelle 7.9 sind die Daten der 'MARK III'-Experimente (Bal 85, Ha 85) für die hier interessierenden Zerfälle angegeben.

Wir führen eine χ^2 -Anpassung durch, d.h. wir minimieren die relativen quadratischen Abweichungen zwischen den gemessenen und den sich nach (7.49)-(7.52) ergebenden theoretischen Verzweigungsraten - unter Berücksichtigung der experimentellen Unsicherheiten - und bestimmen damit die bestmöglichen Werte für die Parameter α , β , γ .

Das Resultat dieses Fits ist in der folgenden Tabelle 7.9 zusammengefaßt. Aufgelistet sind die aktuellen experimentellen Werte (PD 88) für die Verzweigungsraten B^{Exp} der hier interessierenden Zerfälle im Vergleich zu den - entsprechend dem obigen Konzept berechneten - Raten B^{Calc} .

Tabelle 7.9 : (nachfolgende Seite)

Verzweigungsraten $B (J/\psi \rightarrow V P)$: Vergleich zwischen den berechneten Werten des Modells, B^{Calc} , und den experimentellen Daten, B^{Exp} .

Die ersten 10 Werte für B^{Calc} sind das Resultat einer χ^2 -Anpassung der Parameter α, β, γ , welche die $J/\psi - VP$ Wechselwirkung entsprechend Gl.(7.46) und Tabelle 7.8 modellieren. Der Winkel φ ist die relative Phase zwischen den Kopplungstermen proportional β und γ .

Die Raten B^{Calc} für die Zerfallskanäle $J/\psi \rightarrow \phi \iota; \omega \iota; \rho^0 \iota$ hingegen sind mit den obigen Parameterwerten berechnete Vorhersagen des Modells, auf der Grundlage der $\eta - \eta' - \iota$ Mischung aus Abschnitt 7.1.

Die experimentellen Daten sind entnommen aus Analysen der 'MARK III' Experimente (Bal 85, Ha 85). Für Zerfallskanäle, in denen die Verzweigungsraten B^{Exp} für mehr als einen Endzustand gemessen wurden, wird der Mittelwert verwendet.

Zerfall $J/\psi \rightarrow V P$	Verzweigungsrate $B(J/\psi \rightarrow P \gamma)$	
	$B^{Calc} (\cdot 10^{-3})$	$B^{Exp} (\cdot 10^{-3})$
$\frac{1}{3} (\rho^+ \pi^- + \rho^0 \pi^0 + \rho^- \pi^+)$	3.62 ± 0.26	4.43 ± 0.44
$\frac{1}{2} (K^{*+} K^- + K^{*-} K^+)$	2.73 ± 0.17	2.71 ± 0.22
$\frac{1}{2} (K^{*0} \bar{K}^0 + \bar{K}^{*0} K^0)$	1.80 ± 0.22	1.95 ± 0.29
$\omega \pi^0$	0.45 ± 0.05	0.67 ± 0.12
$\phi \eta$	0.48 ± 0.08	0.68 ± 0.07
$\omega \eta$	2.10 ± 0.15	1.9 ± 0.34
$\rho^0 \eta$	0.26 ± 0.03	0.18 ± 0.04
$\phi \eta'$	0.59 ± 0.10	0.37 ± 0.06
$\omega \eta'$	0.74 ± 0.05	0.40 ± 0.11
$\rho^0 \eta'$	0.093 ± 0.01	0.096 ± 0.018
$\phi \iota$	0.048 ± 0.008	?
$\omega \iota$	0.247 ± 0.018	?
$\rho^0 \iota$	0.031 ± 0.004	?
$ \alpha = 0.97 \pm 0.02$ $ \beta = 0.021 \pm 0.01$ $ \gamma = 0.13 \pm 0.008$ $\varphi = 0.98 \pm 0.17$		

Diskussion der Ergebnisse

Zu den Resultaten aus Tabelle 7.9 sind folgende Bemerkungen angebracht:

1. Die Übereinstimmung zwischen den numerischen Ergebnissen und B^{Calc} und den experimentellen Verzweigungsraten B^{Exp} ist im allgemeinen recht akzeptabel, wenn man Ungewißheiten in theoretischer wie auch experimenteller Hinsicht in Betracht zieht: Zum einen ist der phänomenologische Ansatz der Parametrisierung der $J/\psi - Hadron$ -Wechselwirkung, Gl.(7.46) eben nur eine intuitive Modellierung der Dynamik der J/ψ -Zerfälle. Zum anderen sind auch die experimentellen Werte für die Verzweigungsraten teilweise mit beträchtlichen Unsicherheiten belastet. Schließlich ist zu berücksichtigen, daß die Anpassung der Parameter α, β, γ in den Übergangsamplituden $g_{J/\psi VP}$ an die experimentellen Daten unter Verwendung unsere Ergebnisse aus Abschnitt 7.1 für die Zusammensetzung von η und η' bezüglich ihrer quarkonischen und gluonischen Komponenten durchgeführt wurde.

In Anbetracht dieser Verschmelzung von experimentellen Kenntnissen und phänomenologischem Modell sind die Resultate aus Tabelle 7.9 durchaus befriedigend.

2. Die im Rahmen unseres $(\eta - \eta' - \iota)$ -Modells aus Abschnitt 7.1 berechnete Mischung von η und η' , ergibt zusammen mit der Parametrisierung der $J/\psi - Hadron$ -Wechselwirkung, Gl.(7.47), eine akzeptable Beschreibung der $J/\psi \rightarrow VP$ Zerfälle. Wir fassen dies als weiteres positives Testergebnis für unser $(\eta - \eta' - \iota)$ -Mischungsmodell auf.
3. Auf der Basis der dieser Ergebnisse können wir die *Produktionsraten des ι -Teilchens in den Zerfällen $J/\psi \rightarrow \phi \iota; \omega \iota; \rho^0 \iota$* parameterfrei berechnen. Un-

ter Verwendung der Werte für α , β , γ aus Tabelle 7.9 und der in Abschnitt 7.1 berechneten quarkonischen Beimischungen im ι (vgl. Tabelle 7.1(a)), erhalten wir (via (7.49), (7.51) und Tabelle 7.8) folgende *Vorhersagen*:

$$B^{Calc}(J/\psi \rightarrow \phi \iota) = (0.048 \pm 0.008) \cdot 10^{-3}$$

$$B^{Calc}(J/\psi \rightarrow \omega \iota) = (0.247 \pm 0.018) \cdot 10^{-3}$$

$$B^{Calc}(J/\psi \rightarrow \rho^0 \iota) = (0.031 \pm 0.004) \cdot 10^{-3}$$

Von besonderer Bedeutung ist der relativ große Wert für $B(J/\psi \rightarrow \omega \iota)$, dessen Größenordnung etwa vergleichbar ist mit der Rate für die Zerfälle $J/\psi \rightarrow \omega \eta$ und $J/\psi \rightarrow \omega \eta'$. Daher sollte zumindest dieser Zerfallskanal des ι -Teilchens in den MARK III- und DM2- Detektor Experimenten beobachtbar sein.

4. Die Ergebnisse aus Tabelle 7.9 implizieren eine signifikante Verletzung der SU(3)-Symmetrie, die sich in dem nicht vernachlässigbaren Wert der symmetriebrechenden Kopplungskonstanten $\beta = 0.022$ widerspiegelt (vgl. Gl.(7.46) und Bemerkung im Anschluß daran).

Eine Analyse der obigen experimentellen Daten, durchgeführt von der MARK III Gruppe (Bal 85), läßt auf eine noch stärkere SU(3)-Symmetrie Brechung schließen: Danach ergibt sich eine experimentell bestimmte SU(3) Verletzung von $\simeq (21 \pm 6) \%$ und ein relativer Beitrag der elektromagnetischen 1-Photon

Prozesse (Figur 7.4(b)) gegenüber den 3-Gluon Vernichtungsprozessen (Figur 7.4(a)) von $\simeq (13 \pm 1)\%$.

Im Vergleich dazu ergibt sich mit unseren berechneten Werten für α , β , γ aus Tabelle 7.9 eine deutlich geringere Symmetrieverletzung. Die Beiträge der symmetriebrechenden SU(3)-Oktett Wechselwirkungen ($\propto j^{(8)}$ in Gl.(7.46)) relativ zu den Beiträgen der der SU(3)-Singlett Wechselwirkungen ($\propto j^{(0)}$ in Gl.(7.46)) ergeben ein Verhältnis von lediglich $\simeq 11\%$. Dagegen finden wir für das Verhältnis der 1-Photon Prozesse und der 3-Gluon Vernichtungsprozesse $\simeq 12.8\%$, in Einklang mit den Ergebnissen der MARK III Gruppe.

8 Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen

In dieser Arbeit habe ich eine umfassende Untersuchung der Eigenschaften von Glueballs durchgeführt. Das Ziel war es, charakteristische Merkmale von Glueballs herauszuarbeiten und die Unterschiede sowie Gemeinsamkeiten bezüglich der gewöhnlichen Hadronen zu beleuchten, um eine eindeutige experimentelle Identifizierung solcher bislang hypothetischer Teilchen zu erleichtern.

Ausgehend von dem Formalismus der modifizierten, räumlich beschränkten QCD innerhalb einer statischen und sphärisch symmetrischen Kavität (Bu 88), habe ich ein Modell vorgestellt, welches auf dem 'MIT Bag Modell' basiert, jedoch einerseits zusätzliche Grundzüge der Theorie der QCD beinhaltet und andererseits weitere quantentheoretische Elemente wie virtuelle Teilchenanregungen berücksichtigt. Dieses Konzept führte zu einer vereinheitlichten Beschreibung von Glueballs und Hadronen.

Die vielseitigen Anwendungen des Modells wurden eingehend demonstriert und getestet. Die Ergebnisse sind im Vergleich mit aktuellen experimentellen Daten fast durchweg ausgezeichnet, sodaß auch die Vorhersagen des Modells für bislang nicht gemessene Eigenschaften von Glueballs durchaus quantitative Aussagekraft haben sollten und daher als wertvolle Anhaltspunkte für zukünftige Untersuchungen dienen können.

Die wesentlichen Ergebnisse der Analyse von Glueballs und Hadronen im Rahmen des vorgestellten Modells sind:

- Hadronen : Das Massenspektrum und die statischen Eigenschaften der etablierten leichten Hadronen lassen sich (mit einigen Ausnahmen) sehr gut reproduzieren.
- Glueballs : Das Massenspektrum der niedrigliegenden Glueballs ergibt sich in Übereinstimmung mit anderen, unabhängigen theoretischen Untersuchungen und ist in Einklang mit derzeit bekannten experimentellen Daten für potentielle Glueball Kandidaten.
- Mischungen zwischen Glueballs und Mesonen : Die Mischung von Glueballs und gewöhnlichen Mesonen, die am Beispiel der pseudoskalaren Mesonen $\eta(549)$, $\eta'(958)$ und dem Glueball Kandidat $\iota(1440)$ untersucht wurden, zeigt, daß Glueballs in Reinform wahrscheinlich nicht existieren, sondern signifikante Beimischungen von Quark-Zuständen haben. Ebenso ist die Vorstellung von Hadronen als Objekte, die aus reinen Quark-Konfigurationen bestehen, idealisierend. Vielmehr haben sie im allgemeinen vermutlich zumindest geringfügige Beimischungen von gluonischen Komponenten.
- Zerfälle und Erzeugung von Glueballs : Die Zerfalleigenschaften und Produktionsmechanismen von Glueballs lassen sich mit Standardmethoden aus der Hadron-Physik beschreiben, wenn man die Zustände in ihre quarkonischen und ihre rein gluonischen Anteile zerlegt.

Die Ergebnisse der am Beispiel des $\iota(1440)$ -Teilchens und der leichten Mesonen durchgeführten Berechnungen für deren elektromagnetischen Zerfälle und 2-Photon Zerfälle, sowie für ihre Produktion in den Strahlungs- und hadronischen Zerfällen des J/ψ -Mesons sind im allgemeinen sehr gut.

Die wichtigste Erkenntnis ist, daß das ι -Teilchen in seinen Zerfalls- und Erzeugungsmechanismen charakteristische Eigenschaften aufzeigt, die eine Unterscheidung von gewöhnlichen Mesonen ermöglichen und daher für die Identifizierung des $\iota(1440)$ als ein Glueball starke Argumente liefern.

Trotzdem das in dieser Arbeit verfolgte Konzept mehrere intuitive und phänomenologische Zutaten beinhaltet, die nicht rigoros aus den Grundprinzipien der QCD ableitbar sind, rechtfertigt der Erfolg des Modells im Nachhinein die verwendeten Näherungsmethoden und die Handhabung derzeit noch ungeklärter Probleme in der quantenfeldtheoretischen Beschreibung von stark wechselwirkenden Teilchen.

Unabhängig davon bleiben dennoch viele Fragen offen, bevor man die QCD innerhalb einer statischen und sphärisch symmetrischen Kavität als konsistente Quantenfeldtheorie ansehen kann. Die Klärung dieser Probleme liegt außerhalb des Rahmens dieser Arbeit. Nichtsdestotrotz verdeutlichen die in dem vorgestellten Modell aufgetretenen Schwierigkeiten einer rigorosen feldtheoretischen Formulierung der Physik von Glueballs und Hadronen die Notwendigkeit eines eingehenden Studiums.

Die wichtigsten offenen Probleme sind:

- Das Verständnis, wie der Mechanismus des 'Confinements' von Farbladung tragenden Teilchen direkt aus der Theorie der QCD zustande kommt.
- Die Berechnung der Selbstenergien von Quarks und Gluonen in einem räumlich beschränkten Volumen und damit zusammenhängend, die Renormalisierung von Feynman Diagrammen für die QCD in einem endlichen Raumvolumen.
- Die Frage der Gültigkeit (Konvergenz) einer Störungsentwicklung der QCD trotz relativ großer Kopplungskonstante α_s .

- Die Handhabung des Problems der spuriösen Schwerpunkt-Oszillation der Kavität in der statischen Approximation des Bag Modells.

Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen jedoch, daß die Umgehung der obigen Schwierigkeiten in dem präsentierten Modell mittels phänomenologischer Betrachtungen eine durchaus akkurate und glaubwürdige Beschreibung von Glueballs und Hadronen erlauben, ohne die genannten Probleme exakt lösen zu müssen.

Die Übertragung und Weiterentwicklung des vorgestellten Modells auf andere Glueball Kandidaten oder aber exotische Zustände wie z.B. $q\bar{q}g$ -Hybride und größere Quark- oder Gluon-Moleküle, liegt auf der Hand und wäre eine interessante, vielversprechende Aufgabe für die Zukunft.

ANHANG

A : Eigenmoden von Quarks, Gluonen und Geistern in der statischen Kavität

A1: Quarks

A2: Gluonen

A3: Geister

B : Propagatoren und Vertexfunktionen für Quarks, Gluonen und Geister in der statischen Kavität

B1: Propagatoren

B2: Quark-Gluon Vertizes

B3: 3-Gluon Vertizes

B4: 4-Gluon Vertizes

B5: Geist-Gluon Vertizes

C : Wechselwirkung von 2-Teilchen Zuständen in 1.Ordnung Störungstheorie

C1: Physikalische Zustandsvektoren

C2: $q\bar{q}$ - und qq -Wechselwirkung

C3: gg -Wechselwirkung

C4: ($gg \leftrightarrow q\bar{q}$)-Wechselwirkung

C5: Matrixelemente der Wechselwirkungs-Operatoren $\hat{V}$

D : SU(3)-Farbkopplung von Quarks und Gluonen zu zusammengesetzten Zuständen

D1: Die Generatoren der SU(3)

D2: Farbkopplung von Quarks und Gluonen

E : Notation und Einheiten

A Eigenmoden von Quarks, Gluonen und Geistern in der statischen Kavität

In diesem Abschnitt leiten wir die Eigenmoden von Quarks, Gluonen und Geistern ab, die durch die linearen Randbedingungen (4.23)-(4.25) innerhalb einer sphärisch symmetrischen und statischen Kavität eingesperrt sind. Wir folgen in unserer Notation den ausgezeichneten Arbeiten von R.Buser et al. (Bu 88) und A.J.Stoddart (St 87) über 'QCD und kanonische Quantisierung in einer sphärischen Kavität'.

A.1 Quarks

Wir entwickeln die Feldoperatoren der Quarks in ein vollständiges Funktionensystem von Eigenmoden in der Kavität ($x = (x_o, \vec{x}) \equiv (t, \vec{r})$),

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{cf}(x) &= \hat{\psi}_{cf}^{(+)}(x) + \hat{\psi}_{cf}^{(-)}(x) \\ &= \sum_{\substack{\kappa, \mu \\ \nu > 0}} \left[\hat{a}_{c\kappa} u_{\kappa}(\vec{r}) e^{-i\epsilon_{\kappa} t} + \hat{b}_{c\kappa}^{\dagger} u_{-\kappa}(\vec{r}) e^{+i\epsilon_{\kappa} t} \right] \quad (A.1)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{cf} &= \hat{\psi}_{cf}^{(+)}(x) + \hat{\psi}_{cf}^{(-)}(x) \\ &= \sum_{\substack{\kappa, \mu \\ \nu > 0}} \left[\hat{a}_{cn}^+ \bar{u}_n(\vec{r}) e^{+i\epsilon_n t} + \hat{b}_{cn} \bar{u}_{-n}(\vec{r}) e^{-i\epsilon_n t} \right]\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

wobei n und $-n$ für einen vollständigen Satz von Quantenzahlen stehen

$$n = (f, \nu, \kappa, \mu), \quad -n = (f, -\nu, -\kappa, -\mu) \quad (\text{A.3})$$

und f den Flavour, ν die radiale Quantenzahl, κ die Drehimpuls-Spin Projektion und μ die magnetische Quantenzahl bezeichnen. Die Quantenzahlkombinationen n bzw. $-n$ entsprechen den Zuständen mit positiver bzw. negativer Energie.

Ferner ist

$$\epsilon_n = \text{sign}(\nu) \cdot \sqrt{\vec{p}_n^2 + m_f^2}; \quad \epsilon_{-n} = -\epsilon_n \quad (\text{A.4})$$

die Energie und $\vec{p}_n$ der Impuls eines Quarks im Zustand n mit Masse m_f .

Die Operatoren $\hat{a}_{cn}^+$ ($\hat{a}_{cn}$) bzw. $\hat{b}_{cn}^+$ ($\hat{b}_{cn}$) sind Erzeugungs- (Vernichtungs-) Operatoren für ein Quark bzw. Antiquark mit Color c und Quantenzahlkombination n . Sie genügen nach (3.43) den Anti-Vertauschungsrelationen

$$\left\{ \hat{a}_{cn}, \hat{a}_{cn'}^+ \right\} = \left\{ \hat{b}_{cn}, \hat{b}_{cn'}^+ \right\} = \delta_{cc'} \delta_{nn'} \quad (\text{A.5})$$

Die Eigenfunktionen $u_n(\vec{r})$ in (A1) und (A2) sind die Lösungen der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung

$$\left(-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m_f \right) u_n(\vec{r}) = \varepsilon_n \gamma_0 u_n(\vec{r}) \quad (\text{A.6})$$

die durch die Dirac-Spinoren

$$u_n(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_n(r) & \cdot & \chi_\kappa^\mu(\hat{r}) \\ i f_n(r) & \cdot & \chi_{-\kappa}^\mu(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

dargestellt werden. Hierbei bezeichnen die $\chi_\kappa^\mu(\hat{r})$ die üblichen 2-komponentigen spärigen Spinoren und $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$.

Die radialen Funktionen $g_n(r)$ und $f_n(r)$ werden durch die spärigen Besselfunktionen ausgedrückt,

$$\begin{aligned} g_n(r) &= \frac{N_n}{R^{3/2}} j_l(p_n r) \\ f_n(r) &= \frac{N_n}{R^{3/2}} \left(\frac{p_n}{\varepsilon_n + m_f} \right) \text{sign}(\kappa) j_{\bar{l}}(p_n r) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

wobei R der Radius der spärigen Kavität ist.

Entsprechendes gilt für die adjungierten Spinoren $\bar{u}_n(\vec{r})$, die definiert sind als

$$\bar{u}_n(\vec{r}) = u_n^\dagger(\vec{r}) \gamma^0 \quad (\text{A.9})$$

Die Quantenzahlen von Gesamtdrehimpuls j und der Bahndrehimpulse l und $\bar{l}$ sind über die Quantenzahl κ miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned}
j(\kappa) &= |\kappa| - \frac{1}{2} \\
l(\kappa) &= j(\kappa) + \frac{1}{2} \text{sign}(\kappa) \\
\bar{l}(\kappa) &= j(\kappa) - \frac{1}{2} \text{sign}(\kappa)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Die explizite Form der Eigenfunktionen $u_n(\vec{r})$ bzw. $\bar{u}_n(\vec{r})$ wird durch die linearen Randbedingungen der statischen Kavität für die Quark-Feldoperatoren $\hat{\psi}$ und $\hat{\bar{\psi}}$ bestimmt (vgl. Kap.4, Gl.(4.23)):

$$(-i\hat{r} \cdot \vec{\gamma} - 1) \hat{\psi} |_S = \hat{\bar{\psi}} (-i\hat{r} \cdot \vec{\gamma} + 1) |_S = 0 \tag{A.11}$$

wobei $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ der Normalen-Einheitsvektor ist, der senkrecht auf der Oberfläche S der Kavität steht und nach außen gerichtet ist.

Ausgedrückt durch die u_n bzw. $\bar{u}_n$ lautet (A11)

$$(i\vec{\gamma} \cdot \hat{r} + 1) u_n |_{r=R} = \bar{u}_n (i\vec{\gamma} \cdot \hat{r} - 1) |_{r=R} = 0 \tag{A.12}$$

Mit (A7) und (A8) erhält man daraus die Eigenwertgleichung für die Eigenmoden der Quarks

$$j_l(x_n) + \left(\frac{x_n \text{sign}(\kappa)}{\omega_n + \xi_f} \right) j_{\bar{l}}(x_n) = 0 \tag{A.13}$$

mit den dimensionslosen Energie-, Impuls- und Massen-Parametern

$$\begin{aligned}\omega_n &\equiv \varepsilon_n R = \text{sign}(\nu) (+) \sqrt{x_n^2 + \xi_f^2} \\ x_n &\equiv p_n R \\ \xi_f &\equiv m_f R\end{aligned}\tag{A.14}$$

Die Normierungskonstante N_n in (A8) schließlich ist gegeben durch

$$N_n^{-2} = \left(2\omega_n (\omega_n + \kappa) + \xi_f \right) \cdot \left(\frac{j_l(x_n)}{x_n} \right)^2 \tag{A.15}$$

Die Lösungen u_n ($\bar{u}_n$) der Dirac-Gleichung (A6), die den Randbedingungen (A12) genügen, stellen ein vollständiges Orthonormalsystem von Dirac-Spinoren in der statischen Kavität dar, d.h. es gilt

$$\int_R u_n^\dagger(\vec{r}) u_{n'}(\vec{r}) d^3r = \delta_{nn'} \tag{A.16}$$

$$\sum_{\nu, \kappa, \mu} u_{n\alpha}^*(\vec{r}) u_{n\beta}(\vec{r}') = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \tag{A.17}$$

wobei $u_{n\alpha}(\vec{r})$ bzw. $u_{n\beta}(\vec{r}')$ die Komponente α bzw. β der Dirac-Spinoren $u_n(\vec{r})$ und $u_n(\vec{r}')$ bezeichnen.

A.2 Gluonen

Die Entwicklung der Feldoperatoren der Gluonen in ein vollständiges Funktionensystem von Eigenmoden in der Kavität ist, ausgedrückt in positiven und negativen Frequenzanteilen ($x = (x_o, \vec{x}) \equiv (t, \vec{r})$):

$$\begin{aligned}\hat{A}_a^\mu(x) &= \hat{A}_a^{\mu(+)}(x) + \hat{A}_a^{\mu(-)}(x) \\ &= \sum_{\substack{\sigma, J, M \\ N > 0}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m^\sigma}} \left[\hat{c}_{a,m}^\sigma a_m^{\mu\sigma}(\vec{r}) e^{-i\omega_m^\sigma t} + \hat{c}_{a,m}^{\sigma+} a_m^{\mu\sigma}(\vec{r})^* e^{+i\omega_m^\sigma t} \right] \quad (\text{A.18})\end{aligned}$$

Hierbei spezifiziert

$$\sigma = S, L, TE, TM \quad (\text{A.19})$$

die skalare (S), longitudinale (L), transversal elektrische (TE) bzw. transversal magnetische (TM) Polarisation der Gluonen.

Der Index m steht für einen vollständigen Satz von Quantenzahlen,

$$m = (N, J, M) \quad (\text{A.20})$$

wobei N die radiale Quantenzahl, J der Drehimpuls und M die Drehimpulsprojektion angibt.

Die Operatoren $\hat{c}_{a,m}^{\sigma+}$ bzw. $\hat{c}_{a,m}^\sigma$ sind Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren für

ein Gluon mit Polarisation σ Quantenzahlkombination m und Color a . Sie erfüllen nach (3.44) die Vertauschungsrelationen

$$[\hat{c}_{a,m}^\sigma, \hat{c}_{a',m'}^{\sigma'}] = -g^{\sigma\sigma'} \delta_{aa'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.21})$$

mit dem metrischen Polarisationstensor

$$g^{\sigma\sigma'} = \begin{cases} +1 & \text{für } \sigma = S \\ -1 & \text{für } \sigma = L \\ -1 & \text{für } \sigma = TE \\ -1 & \text{für } \sigma = TM \end{cases} \quad g^{\sigma\sigma'} = 0 \text{ für } \sigma \neq \sigma' \quad (\text{A.22})$$

Ferner gilt für die Gluon-Eigenfunktionen $a_m^{\mu,\sigma}(\vec{r})$ die Symmetriebeziehung

$$a_m^{\mu,\sigma}(\vec{r})^* = \eta^\sigma (-1)^M a_{m^*}^{\mu,\sigma}(\vec{r}) \quad (\text{A.23})$$

wobei die (konjugierte) Quantenzahlkombination m^* durch

$$m^* = (N, J, -M) \quad (\text{A.24})$$

und der Phasenfaktor η^σ durch

$$\eta^\sigma = \begin{cases} +1 & \text{für } \sigma = L, TE \\ -1 & \text{für } \sigma = S, TM \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

gegeben ist.

Die Eigenfunktionen $a_m^{\mu,\sigma}(\vec{r})$ sind durch die Lösungen der zeitunabhängigen d'Alembert-Gleichungen

$$\left(\Delta + \omega_m^{S^2} \right) a_m^{o,S}(\vec{r}) = 0, \quad (\sigma = S) \quad (\text{A.26})$$

$$\left(\Delta + \omega_m^{\sigma^2} \right) \vec{a}_m^{\sigma}(\vec{r}) = 0, \quad (\sigma = L, TE, TM) \quad (\text{A.27})$$

bestimmt (wir verwenden der Einfachheit halber die Feynman-Eichung, vgl. Kap.3, Abschnitt 3.2, Gl.(3.7)).

Die Lösungen $a_m^{o,S}(\vec{r})$ bzw. $\vec{a}_m^{\sigma}(\vec{r})$ von (A26) bzw. A(27) lassen sich durch die sphärischen Besselfunktionen und die Kugelflächenfunktionen bzw. Vektor-Kugelflächenfunktionen ausdrücken ($\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$):

- Skalare Polarisation (S), $J \geq 0$:

$$a_m^{o,S}(\vec{r}) = \frac{N_m^S}{R^{3/2}} \cdot i j_J(\omega_m^S r) Y_{JM}(\hat{r}) \quad (\text{A.28})$$

- Longitudinale Polarisation (L), $J \geq 0$:

$$\vec{a}_m^L(\vec{r}) = \frac{N_m^L}{R^{3/2}} \cdot \left[\sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J-1}(\omega_m^L r) \vec{Y}_{J,J-1,M}(\hat{r}) + \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J+1}(\omega_m^L r) \vec{Y}_{J,J+1,M}(\hat{r}) \right] \quad (\text{A.29})$$

- Transversal elektrische Polarisation (TE), $J \geq 1$:

$$\vec{a}_m^{TE}(\vec{r}) = \frac{N_m^{TE}}{R^{3/2}} \cdot j_J(\omega_m^{TE} r) \vec{Y}_{J,J,M}(\hat{r}) \quad (\text{A.30})$$

- Transversal magnetische Polarisation (TM), $J \geq 1$:

$$\begin{aligned} \vec{a}_m^{TM}(\vec{r}) = \frac{N_m^{TM}}{R^{3/2}} \cdot & \left[\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}} j_{J-1}(\omega_m^{TM} r) \vec{Y}_{J,J-1,M}(\hat{r}) \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{J}{2J+1}} j_{J+1}(\omega_m^{TM} r) \vec{Y}_{J,J+1,M}(\hat{r}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Die linearen Randbedingungen der statischen Kavität für die Gluon-Feldoperatoren $\hat{A}_a^\mu$ in Gl.(A18) sind (vgl. Kap.4, Gl.(4.24)):

$$\hat{r}_k \left(\partial^k \hat{A}_a^\nu - \partial^\nu \hat{A}_a^k \right) |_S = \hat{r}_k \hat{A}_a^k |_S = \hat{r}_k \partial^k \left(\partial_\nu \hat{A}_a^\nu \right) |_S = 0 \quad (\text{A.32})$$

wobei wieder $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ den Normalen-Einheitsvektor auf der Oberfläche S bezeichnet, der nach außen gerichtet ist.

Ausgedrückt durch die Eigenfunktionen $a_m^{\sigma,S}$ und $\vec{a}_m^\sigma$ ($\sigma = L, TE, TM$), erhält man via Gl.(A18) für die Bedingungen (A32):

$$\hat{r} \cdot \vec{\nabla} a_m^{o,S}(\vec{r}) \big|_{r=R} = 0 \quad , \quad (\sigma = S) \quad (\text{A.33})$$

$$\hat{r} \cdot \vec{a}_m^\sigma(\vec{r}) \big|_{r=R} = 0 \quad , \quad (\sigma = L, TE, TM) \quad (\text{A.34})$$

$$\hat{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}_m^\sigma(\vec{r})) \big|_{r=R} = 0 \quad , \quad (\sigma = L, TE, TM) \quad (\text{A.35})$$

Mit (A28)-(A31) folgen daraus die Eigenwertgleichungen für die verschiedenen Polarisationen der Gluon-Moden:

- Skalare Polarisation (S) :

$$\frac{d}{dr} j_J(\omega_m^S r) \big|_{r=R} = 0 \quad (\text{A.36})$$

- Longitudinale Polarisation (L) :

$$\frac{d}{dr} j_J(\omega_m^L r) \big|_{r=R} = 0 \quad (\text{A.37})$$

- Transversal elektrische Polarisation (TE) :

$$\frac{d}{dr} \left[r j_J(\omega_m^{TE} r) \right] \big|_{r=R} = 0 \quad (\text{A.38})$$

- Transversal magnetische Polarisation (TM) :

$$j_J(\omega_m^{TM} r) \big|_{r=R} = 0 \quad (\text{A.39})$$

Da die skalaren und die longitudinalen Felder diesselben Eigenwertgleichungen - (A36) und (A37) - erfüllen müssen, gilt

$$\omega_m^S = \omega_m^L \quad (\text{A.40})$$

Die Normierungskonstanten N_m^σ in (A28)-(A31) für die verschiedenen Polarisationen σ der Gluon-Eigenfunktionen sind gegeben durch

$$\left(N_m^S \right)^{-2} = \frac{1}{2} \left(j_J(y_m^S) \right)^2 \left(1 - \frac{J(J+1)}{(y_m^S)^2} \right) \quad (\text{A.41})$$

$$\left(N_m^L \right)^{-2} = \left(N_m^S \right)^{-2} \quad (\text{A.42})$$

$$\left(N_m^{TE} \right)^{-2} = \frac{1}{2} \left(j_J(y_m^{TE}) \right)^2 \left(1 - \frac{J(J+1)}{(y_m^{TE})^2} \right) \quad (\text{A.43})$$

$$\left(N_m^{TM} \right)^{-2} = \frac{1}{2} \left(j_{J+1}(y_m^{TM}) \right)^2 \quad (\text{A.44})$$

wobei der dimensionslose Parameter für die Energie

$$y_m^\sigma \equiv \omega_m^\sigma R \quad (\text{A.45})$$

mit $\sigma = S, L, TE, TM$ eingeführt wurde.

Die Lösungen der d'Alembert-Gleichungen (A26) und (A27), $a_m^{\mu,\sigma}(\vec{r})$, die den Randbedingungen (A33)-(A35) genügen, stellen ein vollständiges Orthonormalsystem von Gluon-Eigenfunktionen in der statischen Kavität dar, d.h. es gilt:

$$\int_R a_{\mu,m}^\sigma(\vec{r}) a_{m'}^{\mu,\sigma'}(\vec{r}) d^3r = g^{\sigma\sigma'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.46})$$

$$\sum_{\sigma,m} g^{\sigma\sigma} a_m^{\mu,\sigma}(\vec{r})^* a_m^{\nu,\sigma}(\vec{r}') = g^{\mu\nu} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{A.47})$$

A.3 Geister

Die Eigenmoden und zugehörigen Energie-Eigenwerte der Geister-Felder in der statischen Kavität sind identisch mit denen der skalar polarisierten Gluonen $a_m^{o,S}$ in Abschnitt A2, Gl.(A28), da sie ebenfalls durch die d'Alembert-Gleichung (A26) und die Randbedingung (A33) bestimmt werden.

Die Entwicklung der Geister-Feldoperatoren in ein vollständiges System von Eigenfunktionen in der statischen Kavität ist daher analog zu (A18) für $\sigma = S$:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{1a}(x) &= \hat{\chi}_{1a}^{(+)}(x) + \hat{\chi}_{1a}^{(-)}(x) \\ &= \sum_{\substack{J,M \\ N>0}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m^S}} \left[\hat{d}_{a,m} a_m^S(\vec{r}) e^{-i\omega_m^S t} + \hat{d}_{a,m}^+ a_m^S(\vec{r})^* e^{+i\omega_m^S t} \right] \quad (\text{A.48}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}_{2a}(x) &= \hat{\chi}_{2a}^{(+)}(x) + \hat{\chi}_{2a}^{(-)}(x) \\
&= \sum_{\substack{J,M \\ N>0}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_m^S}} \left[\hat{e}_{a,m} a_m^S(\vec{r}) e^{-i\omega_m^S t} + \hat{e}_{a,m}^+ a_m^S(\vec{r})^* e^{+i\omega_m^S t} \right] \quad (\text{A.49})
\end{aligned}$$

Die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren $\hat{d}_{a,m}^+$, $\hat{e}_{a,m}^+$ bzw. $\hat{d}_{a,m}$, $\hat{e}_{a,m}$ genügen nach (4.45) und (4.46) den folgenden Anti-Vertauschungsrelationen:

$$\{ \hat{d}_{a,m}, \hat{e}_{a',m'}^+ \} = - \{ \hat{d}_{a,m}^+, \hat{e}_{a',m'} \} = i \delta_{aa'} \delta_{mm'} \quad (\text{A.50})$$

Die Eigenfunktionen $a_m^S(\vec{r})$ sind ebenso wie die skalaren Gluon-Moden Lösungen der d'Alembert-Gleichung (A26):

$$\left(\Delta + \omega_m^{S^2} \right) a_m^S(\vec{r}) = 0 \quad (\text{A.51})$$

In Gl.(A48)-(A51) offenbart sich die 'Zwitternatur' der Geister: Sie erfüllen die Anti-Vertauschungsrelationen (A50), wie sie für Fermionen typisch sind, die Bewegungsgleichung (A51) ist jedoch charakteristisch für bosonische Teilchen; folglich ist auch der Propagator für die Geister (Anhang B, Gl.(B5)) bosonischer Natur.

Die Lösungen von (A51) lassen sich durch sphärische Besselfunktionen und Kugelflächenfunktionen ausdrücken (analog zu (A28)),

$$a_m^S(\vec{r}) = \frac{N_m^S}{R^{3/2}} \cdot i j_J(\omega_m^S r) Y_{JM}(\hat{r}) \quad (\text{A.52})$$

wobei $J \geq 0$.

Die linearen Randbedingungen der statischen Kavität für die Geister-Feldoperatoren $\hat{\chi}_{1a}$ und $\hat{\chi}_{2a}$ sind (vgl. Kap.4, Gl.(4.25)):

$$\hat{r}_k \left(\partial^k \hat{\chi}_{1a} \right) |_S = \hat{r}_k \left(\partial^k \hat{\chi}_{2a} \right) |_S = 0 \quad (\text{A.53})$$

wobei wie zuvor der Einheitsvektor $\hat{r} = \vec{r}/|\vec{r}|$ senkrecht auf der Oberfläche S der Kavität steht und nach außen gerichtet ist.

Mit (A48) und (A49) folgt aus (A53):

$$\hat{r} \cdot \vec{\nabla} a_m^S(\vec{r}) |_{r=R} = 0 \quad (\text{A.54})$$

Die Eigenwertgleichung für die Eigenmoden der Geister ergibt sich damit via (A52) zu

$$\frac{d}{dr} j_J(\omega_m^S r) |_{r=R} = 0 \quad (\text{A.55})$$

Die Normierungskonstanten N_m^S in (A52) sind identisch mit den durch Gl.(A41) gegebenen für die skalaren Gluonen.

Die Eigenfunktionen $a_m^S(\vec{r})$, die der d'Alembert-Gleichung (A51) mit der Randbedingung (A54) genügen, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen der Geister in der statischen Kavität, d.h. es gilt:

$$\int_R a_m^S(\vec{r}) a_{m'}^S(\vec{r}) d^3r = \delta_{mm'} \quad (\text{A.56})$$

$$\sum_m a_m^S(\vec{r})^* a_m^S(\vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{A.57})$$

B Propagatoren und Vertexfunktionen für Quarks, Gluonen und Geister in der statischen Kavität

In diesem Abschnitt skizzieren wir die feldtheoretische Ableitung der Propagatoren und Vertexfunktionen für Quarks, Gluonen und Geister, eingesperrt in einer sphärisch symmetrischen und statischen Kavität entsprechend den Randbedingungen aus Anhang A. Dies führt auf die Feynman-Regeln für die QCD innerhalb einer statischen Kavität, die wir in Kapitel 4 vorgestellt haben. Wir orientieren uns hierbei an A.L.Fetter, J.D.Walecka (Fe71), R.Buser et al. (Bu 88) und A.J.Stoddart (St 87).

B.1 Propagatoren

Die Feynman-Propagatoren der Quarks, Gluonen und Geister sind im quantenfeldtheoretischen Formalismus definiert über die Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten der entsprechenden Feldoperatoren.

(i) Quarks :

Es gibt zwei nicht-verschwindende Feynman-Propagatoren, die aus den Quark-Feldoperatoren konstruiert werden können. Aus den Operator-Entwicklungen Gl.(A1) und Gl.(A2)

und unter Ausnutzung der Anti-Vertauschungsrelationen (A5) erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \langle O | T \left[\hat{\psi}_{cf\alpha}(x) \hat{\bar{\psi}}_{cf'\alpha'}(y) \right] | O \rangle \\
 &= \delta_{cc'} \delta_{ff'} \sum_{\substack{\kappa, \mu \\ \nu > 0}} e^{-i\varepsilon_n |x^0 - y^0|} \\
 &\quad \times \left[u_{n\alpha}(\vec{x}) \bar{u}_{n\alpha'}(\vec{y}) \theta(x^0 - y^0) - u_{-n\alpha}(\vec{x}) \bar{u}_{-n\alpha'}(\vec{y}) \theta(y^0 - x^0) \right]
 \end{aligned} \tag{B.}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \langle O | T \left[\hat{\bar{\psi}}_{cf\alpha}(x) \hat{\psi}_{cf'\alpha'}(y) \right] | O \rangle \\
 &= \delta_{cc'} \delta_{ff'} \sum_{\substack{\kappa, \mu \\ \nu > 0}} e^{-i\varepsilon_n |x^0 - y^0|} \\
 &\quad \times \left[\bar{u}_{-n\alpha}(\vec{x}) u_{-n\alpha'}(\vec{y}) \theta(x^0 - y^0) - \bar{u}_{n\alpha}(\vec{x}) u_{n\alpha'}(\vec{y}) \theta(y^0 - x^0) \right]
 \end{aligned} \tag{B.}$$

Hierbei bedeutet $T[...]$ das zeitgeordnete Produkt der Feldoperatoren und

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x^0 < 0 \\ 1 & \text{für } x^0 > 0 \end{cases} \tag{B.3}$$

(ii) Gluonen :

Aus der Entwicklung der Gluon-Feldoperatoren (A18) und unter Verwendung der Vertauschungsrelationen (A21) erhält man die Feynman-Propagatoren für die Gluonen,

$$\begin{aligned}
 < O | T \left[\hat{A}_a^\mu(x) \hat{A}_b^\nu(y) \right] | O > \\
 &= -\delta_{ab} \sum_{\substack{\sigma, J, M \\ N > 0}} \frac{g^{\sigma\sigma}}{2\omega_m^\sigma} a_m^{\mu, \sigma}(\vec{x}) a_m^{\nu, \sigma}(\vec{y})^* e^{-i\omega_m^\sigma |x^0 - y^0|}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

wobei der 'Polarisationstensor' $g^{\sigma\sigma'}$ durch (A22) gegeben ist.

(iii) Geister :

Mit den Entwicklungen der Geister-Feldoperatoren (A48) und (A49) und unter Ausnutzung der Anti-Vertauschungsrelationen (A50) findet man für die Feynman-Propagatoren der Geister:

$$\begin{aligned}
 < O | T \left[\hat{\chi}_{1a}(x) \hat{\chi}_{2b}(y) \right] | O > &= - < O | T \left[\hat{\chi}_{2a}(x) \hat{\chi}_{1b}(y) \right] | O > \\
 &= i\delta_{ab} \sum_{\substack{J, M \\ N > 0}} \frac{1}{2\omega_m^S} a_m^S(\vec{x}) a_m^S(\vec{y})^* e^{-i\omega_m^S |x^0 - y^0|}
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

B.2 Quark-Gluon Vertizes

Die *Absorption bzw. Emission eines Gluons mit Polarisation σ durch ein Quark* wird durch die folgenden Vertex-Integrale beschrieben:

$$\begin{array}{c} n', c \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \text{---} \text{wavy line} \text{---} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ n, c \end{array} \quad m, a \quad : \quad Q_{n',n,m}^\sigma = i \int \bar{u}_{n'}(\vec{r}) \gamma_\mu u_n(\vec{r}) a_m^{\mu,\sigma}(\vec{r}) d^3r \quad (B.6)$$

$$\begin{array}{c} n', c \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \text{---} \text{wavy line} \text{---} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ n, c \end{array} \quad m^*, a \quad : \quad \tilde{Q}_{n',n,m}^\sigma = i \int \bar{u}_{n'}(\vec{r}) \gamma_\mu u_n(\vec{r}) a_m^{\mu,\sigma}(\vec{r})^* d^3r \quad (B.7)$$

Aufgrund der Beziehungen (A23)-(A25) gilt die Symmetriebeziehung

$$\tilde{Q}_{n',n,m}^\sigma = (-1)^M \eta^\sigma Q_{n',n,m^*}^\sigma = -Q_{n,n',m}^\sigma \quad (B.8)$$

Hierbei ist nach (A3), (A20), (A24) und (A19)

$$n = \{ f, \nu, \kappa, \mu \} \quad (B.9)$$

$$m = \{ N, J, M \} \quad ; \quad m^* = \{ N, J, -M \} \quad (B.10)$$

$$\sigma = S, L, TE, TM \quad (B.11)$$

Die skalaren und longitudinalen Komponenten $Q_{n',n,m}^S$ und $Q_{n',n,m}^L$ vermitteln die farbelektrische 'Coulomb-Wechselwirkung' und sind aufgrund der Erhaltung des farbelektromagnetischen Stroms miteinander verknüpft über:

$$Q_{n',n,m}^L = \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'}}{\omega_m^S} \cdot Q_{n',n,m}^S \quad (\text{B.12})$$

Die transversalen Komponenten, $Q_{n',n,m}^{TE}$ und $Q_{n',n,m}^{TM}$, hingegen beschreiben die 'Spin-Spin Wechselwirkung' zweier Quarks.

Die Separation von radialer Integration und Integration über die Raumwinkel in (B6) (bzw. analog in (B7)) führt auf:

$$Q_{n',n,m}^\sigma = \begin{cases} R_{n',n,m}^\sigma \cdot \int \chi_{\kappa'}^{\mu'}(\hat{r})^+ Y_{JM}(\hat{r}) \chi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) d\Omega & , \text{ für } \sigma = S, L, TM \\ R_{n',n,m}^{TE} \cdot \int \chi_{\kappa'}^{\mu'}(\hat{r})^+ Y_{JM}(\hat{r}) \chi_{-\kappa}^{\mu}(\hat{r}) d\Omega & , \text{ für } \sigma = TE \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

Die Winkelintegrale lassen sich ausführen und über 3j-Symbole angeben (vgl. z.B. Li 84, Ro 57, Ed 64):

$$\begin{aligned} & \int \chi_{\kappa'}^{\mu'}(\hat{r})^+ Y_{JM}(\hat{r}) \chi_{\kappa}^{\mu}(\hat{r}) d\Omega \\ &= (-1)^{\mu'+\frac{1}{2}} \frac{\hat{j}' \hat{J} \hat{j}}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} j' & J & j \\ -\mu' & M & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j' & J & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{(-1)^{l'+J+l} + 1}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Hierbei haben wir die übliche Abkürzung

$$\hat{j} = \sqrt{2j + 1} \quad (\text{B.15})$$

eingeführt. Gleichung (B14) drückt die Drehimpuls- und Paritätserhaltung am Vertex aus.

Die Auswertung der Radial-Integrale $R_{n',n,m}^\sigma$ ist langwierig, so daß wir hier nur die Resultate angeben und auf die Arbeit von R.D.Viollier, S.A.Chin, A.K.Kerman (Vi 83) verweisen. Die $R_{n',n,m}^\sigma$ sind explizit gegeben durch

$$R_{n',n,m}^S = - \frac{N_m^S}{R^{3/2}} \cdot \int_0^R j_J(\omega_m^S r) \cdot S_{n',n} r^2 dr \quad (\text{B.16})$$

$$R_{n',n,m}^L = - \frac{N_m^L}{R^{3/2}} \left(\frac{1}{\omega_m^L} \right) \cdot \int_0^R \left[\left(\omega_m^L r j_{J+1}(\omega_m^L r) - J j_J(\omega_m^L r) \right) \cdot U_{n',n} + (\kappa' - \kappa) j_J(\omega_m^L r) \cdot T_{n',n} \right] r dr \quad (\text{B.17})$$

$$R_{n',n,m}^{TE} = \frac{N_m^{TE}}{R^{3/2}} \left(\frac{\kappa' + \kappa}{\sqrt{J(J+1)}} \right) \cdot \int_0^R j_J(\omega_m^{TE} r) \cdot T_{n',n} r^2 dr \quad (\text{B.18})$$

$$R_{n',n,m}^{TM} = \frac{N_m^{TM}}{R^{3/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{J(J+1)} \omega_m^{TM}} \right) \cdot \int_0^R \left[J(J+1) j_J(\omega_m^{TM} r) \cdot U_{n',n} + (\kappa' - \kappa) \left(J j_J(\omega_m^{TM} r) - \omega_m^{TM} r j_{J-1}(\omega_m^{TM} r) \right) \cdot T_{n',n} \right] r dr \quad (\text{B.19})$$

wobei die Funktionen

$$\begin{aligned}
S_{n',n}(r) &= g_{n'}(r) g_n(r) + f_{n'}(r) f_n(r) \\
T_{n',n}(r) &= g_{n'}(r) f_n(r) + f_{n'}(r) g_n(r) \\
U_{n',n}(r) &= g_{n'}(r) f_n(r) - f_{n'}(r) g_n(r)
\end{aligned}
\tag{B.20}$$

Kombinationen der Radial-Wellenfunktionen der Quarks, Gl.(A8), im Anfangs- und Endzustand sind.

Wir fassen die Formeln (B13) und (B14) in eine übersichtliche Darstellung zusammen und schreiben für die effektiven Quark-Gluon Vertexfunktionen (B6) und (B7) :

$$Q_{n',n,m}^\sigma = \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} S_{n',n,m}^\sigma \right] \cdot \left[\sqrt{2J+1} F_{J,M}(n',n) \right] \tag{B.21}$$

$$\tilde{Q}_{n',n,m}^\sigma = \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \frac{\eta^\sigma}{\sqrt{2J+1}} S_{n',n,m}^\sigma \right] \cdot \left[\sqrt{2J+1} (-1)^M F_{J,-M}(n',n) \right] \tag{B.22}$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{R}} S_{n',n,m}^\sigma = \left(\frac{1 - \eta^\sigma g^{\sigma\sigma} (-1)^{l'+J+l}}{2} \right) \cdot R_{n',n,m}^\sigma \tag{B.23}$$

und

$$F_{J,M}(n', n) = (-1)^{\mu' + \frac{1}{2}} \hat{j}' \hat{J} \hat{j} \begin{pmatrix} j' & J & j \\ -\mu' & M & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j' & J & j \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.24})$$

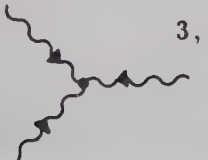
Dabei ist $R_{n', n, m}^{\sigma}$ durch (B16)-(B20) gegeben und η^{σ} , $g^{\sigma\sigma}$ sind durch (A25) bzw. (A22) definiert. Die Quantenzahlen der Quarks im Anfangs- und Endzustand, n bzw. n' , und des Gluons, m , σ , sind in (B9)-(B11) angegeben.

B.3 3-Gluon Vertizes

Die *Absorption* bzw. *Emission* eines 'zeitartigen' ($\sigma = S$) oder eines 'raumartigen' ($\sigma = L, TE, TM$) Gluons durch ein anderes zeit- oder raumartiges Gluon wird durch die folgenden drei Vertex-Integrale beschrieben:

(i) 3 raumartige Gluonen :

1, a



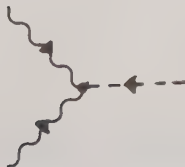
3, c

$$: I^{RRR} = \int \left(\vec{a}_{m_1}^{\sigma_1}(\vec{r}) \times \vec{a}_{m_2}^{\sigma_2}(\vec{r}) \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}_{m_3}^{\sigma_3}(\vec{r}) \right) d^3r \quad (\text{B.25})$$

2, b

(ii) 2 raumartige Gluonen, 1 zeitartiges Gluon :

1, a

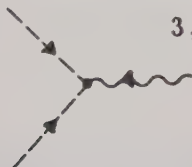


$$: I^{RRT} = (-i) \int \left(\vec{a}_{m_1}^{\sigma_1}(\vec{r}) \cdot \vec{a}_{m_2}^{\sigma_2}(\vec{r}) \right) a_{m_3}^S(\vec{r}) d^3r \quad (\text{B.26})$$

2, b

(iii) 2 zeitartige Gluonen, 1 raumartiges Gluon :

1, a



$$: I^{TTR} = \int a_{m_1}^S(\vec{r}) a_{m_2}^S(\vec{r}) \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}_{m_3}^{\sigma_3}(\vec{r}) \right) d^3r \quad (\text{B.27})$$

2, b

Die Superskripte R bzw. T stehen für raumartige Gluonen mit $\sigma = L, TE, TM$ bzw. für zeitartige Gluonen mit $\sigma = S$.

Die Auswertung der Integrale (B25)-(B27) verläuft nach demselben Muster wie die in Abschnitt B1 skizzierte Berechnung der Quark-Gluon Vertex-Integrale:

Man setzt für die Gluon-Wellenfunktionen $a_m^S(\vec{r})$ und $\vec{a}_m^{\sigma}(\vec{r})$, ($\sigma = L, TE, TM$) die Ausdrücke (A28) und (A29)-(A31) ein, separiert radiale Integrationen und Winkel-Integrationen und verwendet das *Wigner-Eckardt Theorem* um die Vertex-Integrale als Produkt eines rein 'geometrischen' Anteils und eines 'physikalischen' Anteils darzustellen (vgl. z.B. Li 84, Ro 57, Ed 64).

Auf diese Weise lassen sich die Vertex-Integrale zerlegen in einen Faktor, bestehend aus einer Kombination von Wigner-Koeffizienten, der die Drehimpuls-Erhaltung

am Vertex garantiert und die z -Komponenten der Drehimpulse enthält, und in eine reduzierte Vertexfunktion, welche die eigentliche Physik der Wechselwirkung der Gluonen beschreibt und von den Drehimpulsen J_i , den relativen Bahndrehimpulsen L_i , nicht jedoch von den z -Komponenten M_i der Drehimpulse abhängt.

Wir geben hier lediglich die Resultate dieser Prozedur an. Dazu führen wir folgende Kurznotation für die Darstellung der Gluon-Wellenfunktionen (A28)-(A31):

$$a_m^{\sigma,S}(\vec{r}) = \frac{N_m^S}{R^{3/2}} \cdot i j_J(\omega_m^S r) Y_{JM}(\hat{r}) \quad (\text{B.28})$$

$$\vec{a}_m^\sigma(\vec{r}) = \frac{N_m^\sigma}{R^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \cdot \sum_{L=|J-1|}^{J+1} \alpha_{J,L}^\sigma j_L(\omega_m^\sigma r) \vec{Y}_{J,L,M}(\hat{r}) \quad (\text{B.29})$$

für $\sigma = L, TE, TM$ und

$$\vec{\nabla} \times \vec{a}_m^\sigma(\vec{r}) = -i \omega_m^\sigma \frac{N_m^\sigma}{R^{5/2}} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \cdot \sum_{L=|J-1|}^{J+1} \beta_{J,L}^\sigma j_L(\omega_m^\sigma r) \vec{Y}_{J,L,M}(\hat{r}) \quad (\text{B.30})$$

für $\sigma = TE, TM$.

Hierbei sind die Koeffizienten α_{JL}^σ und β_{JL}^σ gegeben durch

$$\alpha_{J,J-1}^L = \sqrt{J} \quad , \quad \alpha_{J,J+1}^L = \sqrt{J+1}$$

$$\alpha_{J,J}^{TE} = \sqrt{2J+1} \quad (B.31)$$

$$\alpha_{J,J-1}^{TM} = \sqrt{J+1} \quad , \quad \alpha_{J,J+1}^{TM} = -\sqrt{J}$$

und

$$\beta_{J,J-1}^{TE} = -\sqrt{J+1} \quad , \quad \beta_{J,J+1}^{TE} = \sqrt{J}$$

$$\beta_{J,J}^{TM} = \sqrt{2J+1} \quad (B.32)$$

Alle anderen Koeffizienten verschwinden.

Die effektiven 3-Gluon Vertexfunktionen (B25)-(B27) lassen sich dann wie folgt darstellen:

(i) 3 raumartige Gluonen :

$$I^{RRR} = \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{RRR}(J_1, J_2, J_3; L_1, L_2, L_3) \quad (B.33)$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi R}} V^{RRR} = \nu_{1,2,3}^{RRR} + \nu_{3,1,2}^{RRR} + \nu_{2,3,1}^{RRR} \quad (B.34)$$

und

$$\mathcal{V}_{1,2,3}^{RRR} = \left[\frac{N_1 N_2 N_3}{\hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3} \frac{\omega_3}{R^{11/2}} \sum_{L_1, L_2, L_3} \alpha_{J_1, L_1}^{\sigma_1} \alpha_{J_2, L_2}^{\sigma_2} \alpha_{J_3, L_3}^{\sigma_3} \cdot R_{L_1, L_2, L_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \right] \times \left[\sqrt{\frac{6}{4\pi}} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3 \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{L}_3 \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ L_1 & L_2 & L_3 \end{Bmatrix} \right] \quad (\text{B.35})$$

$$R_{L_1, L_2, L_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int_0^R j_{L_1}(\omega_1 r) j_{L_2}(\omega_2 r) j_{L_3}(\omega_3 r) r^2 dr \quad (\text{B.36})$$

(ii) 2 raumartige Gluonen, 1 zeitartiges Gluon :

$$I^{RRT} = \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{RRT}(J_1, J_2, J_3; L_1, L_2) \quad (\text{B.37})$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi R}} V^{RRT} = (\chi_1 \omega_1 - \chi_2 \omega_2) \cdot \mathcal{V}_{1,2,3}^{RRT} \quad (\text{B.38})$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1,2,3}^{RRT} = & \left[\frac{N_1 N_2 N_3}{\hat{J}_1 \hat{J}_2} \frac{1}{R^{9/2}} \sum_{L_1, L_2} \alpha_{J_1, L_1}^{\sigma_1} \alpha_{J_2, L_2}^{\sigma_2} \cdot R_{L_1, L_2, J_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \right] \\ & \times \left[\frac{(-1)^{L_1+J_1}}{\sqrt{4\pi}} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{J}_3 \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & J_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ L_2 & L_1 & 1 \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$R_{L_1, L_2, J_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int_0^R j_{L_1}(\omega_1 r) j_{L_2}(\omega_2 r) j_{J_3}(\omega_3 r) r^2 dr \quad (\text{B.40})$$

Die Parameter χ_1, χ_2 in (B38) haben die Werte $+1$ für in den Vertex einlaufende Gluonen und -1 für Gluonen, die aus dem Vertex herauslaufen.

(iii) 2 zeitartige Gluonen, 1 raumartiges Gluon :

$$I^{TTR} = \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{TTR}(J_1, J_2, J_3; L_3) \quad (\text{B.41})$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi R}} V^{TTR} = \mathcal{V}_{1,2,3}^{TTR} + \mathcal{V}_{3,1,2}^{TTR} + \mathcal{V}_{2,3,1}^{TTR} \quad (\text{B.42})$$

und

$$\mathcal{V}_{1,2,3}^{TTR} = \left[\frac{N_1 N_2 N_3}{\hat{J}_3} \frac{\omega_3}{R^{11/2}} \sum_{L_3} \beta_{J_3, L_3}^{\sigma_3} \cdot R_{J_1, J_2, L_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \right] \\ \times \left[\sqrt{\frac{6}{4\pi}} \hat{J}_3 \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{L}_3 \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ J_1 & J_2 & L_3 \end{Bmatrix} \right] \quad (\text{B.43})$$

$$R_{J_1, J_2, L_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int_0^R j_{J_1}(\omega_1 r) j_{J_2}(\omega_2 r) j_{L_3}(\omega_3 r) r^2 dr \quad (\text{B.44})$$

B.4 4-Gluon Vertizes

Die *elementare Punktwechselwirkung von vier Gluonen* wird durch zwei Sorten von 4-Gluon Vertizes beschrieben, die durch die folgenden Vertex-Integrale gegeben sind:

(i) 4 raumartige Gluonen :

3, c

4, d

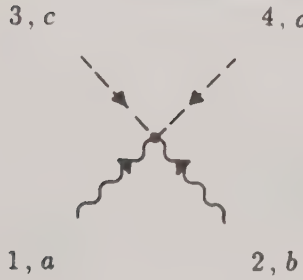


$$: I^{RRRR} = \int \left(\vec{a}_{m_1}^{\sigma_1}(\vec{r}) \cdot \vec{a}_{m_2}^{\sigma_2}(\vec{r}) \right) \left(\vec{a}_{m_3}^{\sigma_3}(\vec{r}) \cdot \vec{a}_{m_4}^{\sigma_4}(\vec{r}) \right) d^3r \quad (\text{B.45})$$

1, a

2, b

(ii) 2 raumartige Gluonen, 2 zeitartige Gluonen :



The diagram shows a central vertex with four external lines. Lines 1 and 2 are wavy (time-like) and labeled '1, a' and '2, b' respectively. Lines 3 and 4 are dashed (space-like) and labeled '3, c' and '4, d' respectively. Arrows on the dashed lines point towards the vertex, while arrows on the wavy lines point away from the vertex.

$$: I^{RRTT} = \int \left(\vec{a}_{m_1}^{\sigma_1}(\vec{r}) \cdot \vec{a}_{m_2}^{\sigma_2}(\vec{r}) \right) a_{m_3}^S(\vec{r}) a_{m_4}^S(\vec{r}) d^3 r \quad (\text{B.46})$$

Hierbei steht wie zuvor R für ein raumartiges Gluon mit Polarisation $\sigma = L, TE, TM$ und T für ein zeitartiges Gluon mit $\sigma = S$.

Die Auswertung der Vertex-Integrale ist analog zum Fall der 3-Gluon Vertizes in Abschnitt B3. Mit Hilfe des Wigner-Eckardt Theorems lassen sich die Integrale jeweils faktorisieren in eine *Kombination von Wigner-Koeffizienten* ('geometrischer Faktor') und eine *reduzierte Vertexfunktion* ('physikalischer Faktor').

Die effektiven 4-Gluon Vertexfunktionen (B45) und (B46) stellen wir dementsprechend wie folgt dar (unter Verwendung der Notation (B31),(B32)):

(i) 4 raumartige Gluonen :

$$I^{RRRR} = 2 F_{13;24} - F_{12;34} - F_{14;32} \quad (\text{B.47})$$

wobei

$$F_{12;34} = \sum_{J_z, M_z} (-1)^{M_z} (2J_z + 1) \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_z \\ M_1 & M_2 & M_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 & J_4 & J_z \\ M_3 & M_4 & -M_z \end{pmatrix} \\ \times \frac{1}{4\pi R} V^{RRRR}(J_1, J_2, J_3, J_4; L_1, L_2, L_3, L_4) \quad (\text{B.48})$$

und

$$\frac{1}{4\pi R} V^{RRRR} = \\ = \left[\frac{N_1 N_2 N_3 N_4}{\hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3 \hat{J}_4} \frac{1}{R^6} \cdot \sum_{L_1, L_2, L_3, L_4} \alpha_{J_1, L_1}^{\sigma_1} \alpha_{J_2, L_2}^{\sigma_2} \alpha_{J_3, L_3}^{\sigma_3} \alpha_{J_4, L_4}^{\sigma_4} \cdot R_{L_1, L_2, L_3, L_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \right] \\ \times \left[\frac{(-1)^{J_1+L_2+J_3+L_4}}{4\pi} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3 \hat{J}_4 \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{L}_3 \hat{L}_4 \cdot \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & J_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_3 & L_4 & J_z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_z \\ L_2 & L_1 & 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_3 & J_4 & J_z \\ L_4 & L_3 & 1 \end{matrix} \right\} \right] \quad (\text{B.49})$$

$$R_{L_1, L_2, L_3, L_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \int_0^R j_{L_1}(\omega_1 r) j_{L_2}(\omega_2 r) j_{L_3}(\omega_3 r) j_{L_4}(\omega_4 r) r^2 dr \quad (\text{B.50})$$

(ii) 2 raumartige Gluonen, 2 zeitartige Gluonen :

$$I^{RRTT} \equiv G_{12;34} \quad (\text{B.51})$$

wobei

$$\begin{aligned} G_{12;34} = & \sum_{J_x, M_x} (-1)^{M_x} (2J_x + 1) \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_x \\ M_1 & M_2 & M_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 & J_4 & J_x \\ M_3 & M_4 & -M_x \end{pmatrix} \\ & \times \frac{1}{4\pi R} V^{RRTT}(J_1, J_2, J_3, J_4; L_1, L_2) \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi R} V^{RRTT} = & \left[\frac{N_1 N_2 N_3 N_4}{\hat{J}_1 \hat{J}_2} \frac{1}{R^6} \cdot \sum_{L_1, L_2, L_3, L_4} \alpha_{J_1, L_1}^{\sigma_1} \alpha_{J_2, L_2}^{\sigma_2} \cdot R_{L_1, L_2, J_3, J_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \right] \\ & \times \left[\frac{(-1)^{J_1 + L_2 + J_3 + J_4}}{4\pi} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3 \hat{J}_4 \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{J}_3 \hat{J}_4 \cdot \right. \\ & \left. \cdot \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & J_x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 & J_4 & J_x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_x \\ L_2 & L_1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J_3 & J_4 & J_x \\ J_4 & J_3 & 1 \end{Bmatrix} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

$$R_{L_1, L_2, J_3, J_4}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) = \int_0^R j_{L_1}(\omega_1 r) j_{L_2}(\omega_2 r) j_{J_3}(\omega_3 r) j_{J_4}(\omega_4 r) r^2 dr \quad (\text{B.54})$$

B.5 Geist-Gluon Vertizes

Schließlich gibt es noch die Kopplung der Geister an die Gluonen, für die zwei Typen von Vertizes existieren. Die beiden entsprechenden Vertex-Integrale, welche die *Absorption bzw. Emission eines Geistes durch ein raum- oder zeitartiges Gluon* beschreiben, sind:

(i) 2 Geister, 1 raumartiges Gluon :

1, a



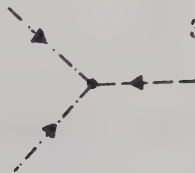
3, c

$$: I^{GGR} = \int a_{m_1}^S(\vec{r}) a_{m_2}^S(\vec{r}) \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}_{m_3}^S(\vec{r}) \right) d^3r \quad (\text{B.55})$$

2, b

(ii) 2 Geister, 1 zeitartiges Gluon :

1, a



3, c

$$: I^{GGT} = \int a_{m_1}^S(\vec{r}) a_{m_2}^S(\vec{r}) a_{m_3}^S(\vec{r}) d^3r \quad (\text{B.56})$$

2, b

Wie zuvor stellen wir diese Vertex-Integrale jeweils als Produkt eines 'geometrischen' Faktors, bestehend aus einer *Kombination von Wigner-Koeffizienten* und einer *reduzierten Vertexfunktion* dar.

Die effektiven Geist-Gluon Vertexfunktionen (B55) und (B56) lassen sich dann in der folgenden Gestalt angeben:

(i) 2 Geister, 1 raumartiges Gluon :

$$I^{GGR} = \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{GGR}(J_1, J_2, J_3; L_3) \quad (B.57)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} V^{GGR} &= \left[\frac{N_1 N_2 N_3}{\hat{J}_3} \frac{\omega_3}{R^{11/2}} \sum_{L_3} \beta_{J_3, L_3}^{\sigma_3} \cdot R_{J_1, J_2, L_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \right] \\ &\times \left[\sqrt{\frac{6}{4\pi}} \hat{J}_3 \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{L}_3 \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ J_1 & J_2 & L_3 \end{Bmatrix} \right] \quad (B.58) \end{aligned}$$

und

$$R_{J_1, J_2, L_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int_0^R j_{J_1}(\omega_1 r) j_{J_2}(\omega_2 r) j_{L_3}(\omega_3 r) r^2 dr \quad (B.59)$$

(ii) 2 Geister, 1 zeitartiges Gluon :

$$I^{GGT} = \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} \cdot V^{GGT}(J_1, J_2, J_3) \quad (\text{B.60})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4\pi R}} V^{GGT} &= \left[N_1 N_2 N_3 \frac{1}{R^{9/2}} R_{J_1, J_2, J_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \right] \\ &\times \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \hat{J}_1 \hat{J}_2 \hat{J}_3 \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ J_1 & J_2 & L_3 \end{matrix} \right\} \right] \quad (\text{B.61}) \end{aligned}$$

und

$$R_{J_1, J_2, J_3}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int_0^R j_{J_1}(\omega_1 r) j_{J_2}(\omega_2 r) j_{J_3}(\omega_3 r) r^2 dr \quad (\text{B.62})$$

C Wechselwirkung von 2-Teilchen Zuständen im Bag in 1. Ordnung Störungstheorie

Im folgenden erläutern wir die Auswertung der Feynman-Diagramme $\sim O(\alpha_S)$ der 1. Ordnung in der starken Kopplungskonstante α_S , die für diese Arbeit von Interesse sind. Wir skizzieren die Berechnung der entsprechenden Matrixelemente von physikalischen Zuständen, bestehend aus Quarks, Antiquarks oder Gluonen, indem wir die Feynman-Regeln aus Kapitel 4, Abschnitt 4.4 anwenden.

C.1 Physikalische Zustandsvektoren

Entsprechen Kap.5, Abschnitt 5.2.1, betrachten wir die folgenden zusammengesetzten Zustände:

a) $q\bar{q}$ -System :

$$|(q_1 \bar{q}_2)_\alpha > \equiv \left[\hat{a}_{c_1 n_1}^+ \hat{b}_{c_2 n_2}^+ \right]^{(0^{-+}/1^{--}; \{1\})} |O > \quad (C.1)$$

b) qqq-System :

$$\begin{aligned}
 |(q_1 q_2 q_3)_\alpha > &\equiv \left[\hat{a}_{c_1 n_1}^+ \hat{a}_{c_2 n_2}^+ \hat{a}_{c_3 n_3}^+ \right]^{(\frac{1}{2}^+ / \frac{3}{2}^+ ; \{1\})} |O> \\
 &= \left[\left[\hat{a}_{c_1 n_1}^+ \hat{a}_{c_2 n_2}^+ \right]^{(0^+ / 1^+ ; \{3\})} \times \left[\hat{a}_{c_3 n_3}^+ \right]^{(\frac{1}{2}^+ ; \{3\})} \right]^{(\frac{1}{2}^+ / \frac{3}{2}^+ ; \{1\})} |O>
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

c) gg-System :

$$|(g_1 g_2)_\alpha > \equiv \left[\hat{c}_{a_1 m_1}^{\sigma_1 +} \hat{c}_{a_2 m_2}^{\sigma_2 +} \right]^{(0^{++}, 0^{-+} / 2^{++}, 2^{-+} ; \{1\})} |O> \tag{C.3}$$

wobei $\sigma_i = TE$ oder TM , d.h. für die beiden Gluonen sind nur die transversalen (physikalischen) Polarisationen erlaubt.

Die Notation in (C1)-(C3) ist wie folgt:

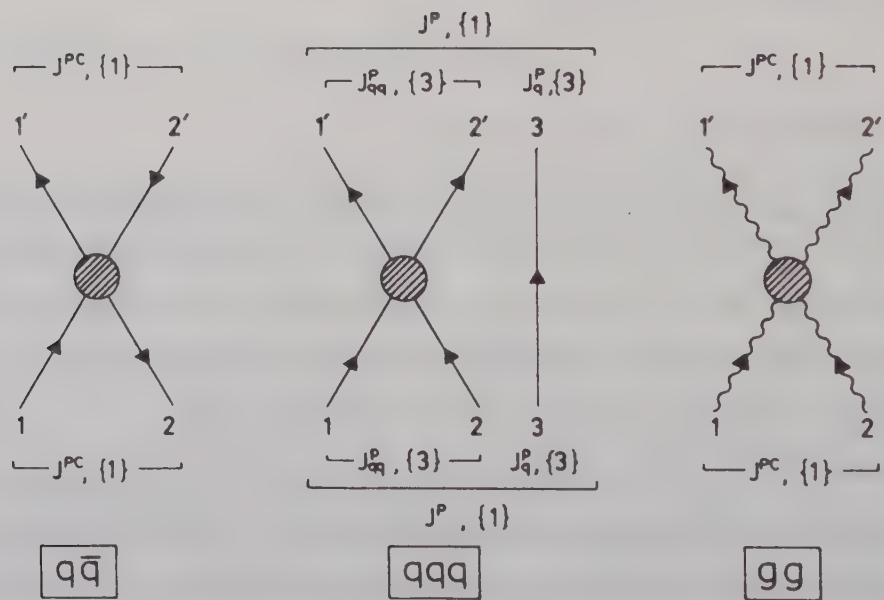
Die Indizes an den Erzeugungsoperatoren spezifizieren die Quantenzahlen der Einteilchen-Zustände entsprechend den Quantenzahlkombinationen für Quarks bzw. Gluonen nach Anhang A, Gl. (A3) bzw. Gl. (A20), (A24). Das Subskript α charakterisiert die aus diesen Einteilchen-Zuständen zusammengesetzten Zustände und entspricht einer ganz bestimmten Kombination von Quantenzahlen.

Weiterhin steht $(J^{PC} ; \{N\})$ in (C1) und (C3) für die Kopplung der Einteilchen-Zustände zu wohldefiniertem Gesamtdrehimpuls J , Parität P und Ladungspartität C entsprechend den physikalisch erlaubten Kombinationen, und für die Farb-Kopplung zu einer bestimmten irreduziblen Darstellung der $SU(3)_{color}$, $\{N\}$ ($N = 1$: Singlett,

$N = 3$: Triplet, usw.). Entsprechendes gilt für $(J^P; \{N\})$ in (C2).

Die Zustände (C1)-(C3) müssen den 'Physikalitätskriterien' aus Kapitel 4, Gl. (4.45)-(4.47), genügen, d.h. sie tragen die erhaltenen Quantenzahlkombinationen J^{PC} bzw. J^P , sind globale Color-Singlett Zustände $\{N = 1\}$ und sind auf 1 normiert. Diese Kopplung der Einteilchen-Zustände zu den zusammengesetzten Zuständen (C1)-(C3) mit physikalisch erlaubtem J^{PC} und $\{N\}$ ist in Figur C1 illustriert.

Da wir die Wechselwirkung in $O(\alpha_s)$ der obigen Zustände über die jeweiligen Zwei-Teilchen Wechselwirkungsamplituden berechnen werden, haben wir die qqq -Zustände in (C2) aufgespalten in einen Color-Triplett 2-Quark Zustand und in ein einzelnes Quark-Triplett, derart, daß der gesamte qqq -Zustand wieder ein Color-Singlett ist. Für die folgenden Betrachtungen ist nur der 2-Quark Anteil von Bedeutung, das dritte Quark hat nur eine 'Zuschauerrolle' inne. Allerdings müssen sämtliche Permutationen der drei Quarks berücksichtigt werden.



Figur C1 : Kopplung der externen Einteilchen-Zustände von Quarks, Antiquarks und transversalen Gluonen zu physikalischen, zusammengesetzten $q\bar{q}$ -, qqq - und gg -Zuständen mit wohldefiniertem J^{PC} bzw. J^P und zu Color-Singletts.

Die explizite Form der zusammengesetzten Zwei-Teilchen Zustände für das $q\bar{q}$ -, qqq - bzw. gg -System in (C1)-(C3) konstruieren wir wie folgt:

Wir stellen die zusammengesetzten Zustände $|(1, 2)_\alpha\rangle$ als Produkt von Farb-Anteil, geometrischem Anteil und radialem Anteil dar, d.h.

$$|(1, 2)_\alpha\rangle \equiv |(N_1, N_2) N, K\rangle \times |(j_1, j_2) J, M\rangle \times |(\alpha_1, \alpha_2)\rangle \quad (C.4)$$

Hierbei steht 1 und 2 für die jeweiligen Einteilchen-Zustände und $(1, 2)_\alpha$ für $(q_1, \bar{q}_2)_\alpha$, $(q_1, q_2)_\alpha$ oder $(g_1, g_2)_\alpha$. Der Index α charakterisiert eine bestimmte Kombination der Quantenzahlen von 1 und 2 (vgl. Kap.5, Abschnitt 5.2.1(ii)). Die Zahlen N_i bzw. N spezifizieren die $SU(3)_{color}$ -Darstellungen von 1, 2 bzw. von $(1, 2)$. Die j_i bzw. J bezeichnen die Gesamtdrehimpulse von 1, 2 bzw. von $(1, 2)$ und die α_i stehen für alle anderen, nicht explizit angegebenen Quantenzahlen von 1 und 2.

Weiterhin ist

$$|(N_1, N_2) N, K\rangle = \sum_{K_1, K_2} \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N \\ K_1 & K_2 & K \end{pmatrix} |N_1, K_1\rangle \times |N_2, K_2\rangle \quad (C.5)$$

wobei die $\begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N \\ K_1 & K_2 & K \end{pmatrix}$ die Glebsch-Gordan Koeffizienten der $SU(3)_{color}$ sind (DeS 63), und

$$\begin{aligned}
|(j_1, j_2) J, M\rangle &= \sqrt{2J+1} (-1)^{j_1+j_2} \\
&\times \sum_{m_1, m_2} (-1)^{m_1-m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix} |j_1, m_1\rangle \times |j_2, m_2\rangle
\end{aligned} \tag{C.6}$$

mit den gewöhnlichen $3j$ -Symbolen $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & J \\ m_1 & m_2 & -M \end{pmatrix}$ der Drehimpuls-Kopplung.

Gleichung (C5) beschreibt die Kopplung der Einteilchen-Zustände 1 und 2 in den $SU(3)_{color}$ -Darstellungen N_1 und N_2 zu einer irreduziblen Darstellung N des zusammengesetzten Zustands. Entsprechend drückt Gleichung (C6) die Kopplung der Drehimpulse j_1 und j_2 von 1 und 2 zu einem Gesamtdrehimpuls J mit z -Komponente M aus, womit auch die Parität des zusammengesetzten Systems festgelegt ist.

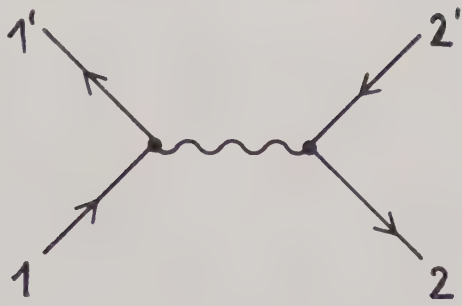
Schließlich sind die Zustände (C4) normiert, d.h.

$$\langle (1', 2')_\beta | (1, 2)_\alpha \rangle = \delta_{11'} \delta_{22'} \delta_{\alpha\beta} \tag{C.7}$$

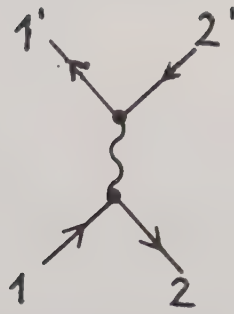
C.2 $q\bar{q}$ - und qq - Wechselwirkung in $O(\alpha_S)$

In 1. Ordnung in der starken Kopplungskonstante $\alpha_S = g^2/4\pi$, d.h. in $O(\alpha_S)$, gibt es folgende Feynman-Diagramme für die $q\bar{q}$ - bzw. qq - Wechselwirkung:

(i) $q\bar{q}$ -System :

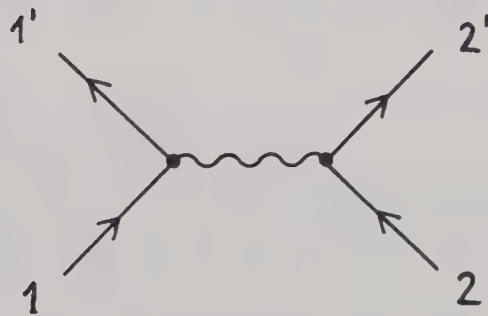


1-Gluon Austausch



Paarvernichtung

(ii) qq -System :

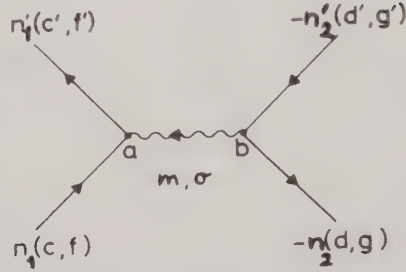


1-Gluon Austausch

Mit Hilfe der Feynman-Regeln aus Kapitel 4, Abschnitt 4.4 lassen sich den obigen Diagrammen entsprechenden Wechselwirkungs-Operatoren $\hat{V}$ sofort angeben:

(i) $q\bar{q}$ -System :

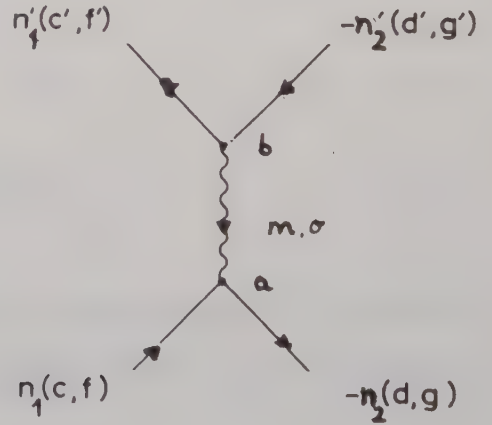
Für die Wechselwirkung via 1-Gluon Austausch



ergibt sich

$$\hat{V}_{q\bar{q}}^{(EX)} = g^2 \delta_{f'f} \delta_{g'g} \left[\sum_{a,b} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'c} \left(-\frac{\hat{\lambda}^b}{2} \right)_{dd'} \delta^{ab} \right] \times \left[\sum_{\substack{\sigma, J, M \\ N > 0}} \frac{g^{\sigma\sigma}}{2\omega_m^\sigma} Q_{n'_1, n_1, m}^\sigma \left(\frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_1} - \varepsilon_{n_1}} + \frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_2} - \varepsilon_{n_2}} \right) \tilde{Q}_{-n_2, -n'_2, m}^\sigma \right] \quad (C.8)$$

Für die Wechselwirkung via $q\bar{q}$ -Vernichtung



erhält man dagegen

$$\hat{V}_{q\bar{q}}^{(AN)} = g^2 \delta_{fg} \delta_{f'g'} \left[\sum_{a,b} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{dc} \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2} \right)_{c'd'} \delta^{ab} \right] \times \left[\sum_{\substack{\sigma, J, M \\ N > 0}} \frac{g^{\sigma\sigma}}{2\omega_m^\sigma} Q_{-n_2, n_1, m}^\sigma \left(\frac{1}{\omega_m^\sigma - \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{n_2}} + \frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_1} + \varepsilon_{n'_2}} \right) \tilde{Q}_{n'_1, -n'_2, m}^\sigma \right] \quad (C.9)$$

Durch Einsetzen der expliziten Ausdrücke für die Vertexfunktionen Q und $\tilde{Q}$ nach Anhang B, (B21) und (B22), erhält man daraus für die Wechselwirkung via 1-Gluon Austausch

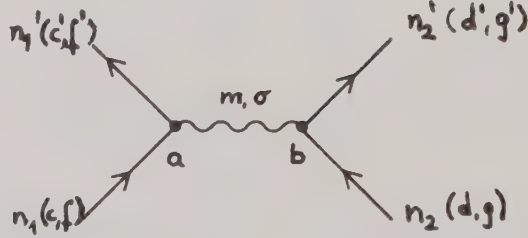
$$\begin{aligned}
\hat{V}_{q\bar{q}}^{(EX)} &= \frac{g^2}{4\pi R} \delta_{f'f} \delta_{g'g} \left[\sum_a \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'c} \left(-\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{dd'} \right] \\
&\times \sum_{J=0}^{\infty} \left[\sum_{\sigma, N>0} \frac{g^{\sigma\sigma}}{2\omega_m^\sigma} \frac{\eta^\sigma}{(2J+1)} \right. \\
&\quad \left. S_{n'_1, n_1, m}^\sigma \left(\frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_1} - \varepsilon_{n_1}} + \frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_2} - \varepsilon_{n_2}} \right) S_{-n_2, -n'_2, m}^\sigma \right] \\
&\quad \cdot \left[\sum_{M=-J}^J (2J+1) (-1)^M F_{J,M}(n'_1, n_1) F_{J,-M}(-n_2, -n'_2) \right] \\
&\equiv \frac{\alpha_S}{R} \delta_{f'f} \delta_{g'g} \hat{\Gamma}_{q\bar{q}}^{(EX)} \cdot \sum_{J=0}^{\infty} \hat{\mu}_{q\bar{q}}^{(EX)}(J) \hat{W}_{q\bar{q}}^{(EX)}(J) \quad (C.10)
\end{aligned}$$

und für die Wechselwirkung via $q\bar{q}$ -Vernichtung

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{q\bar{q}}^{(AN)} &= \frac{g^2}{4\pi R} \delta_{fg} \delta_{f'g'} \left[\sum_a \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{dc} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'd'} \right] \\
&\times \sum_{J=0}^{\infty} \left[\sum_{\sigma, N>0} \frac{g^{\sigma\sigma}}{2\omega_m^\sigma} \frac{\eta^\sigma}{(2J+1)} \right. \\
&\quad \left. S_{-n_2, n_1, m}^\sigma \left(\frac{1}{\omega_m^\sigma - \varepsilon_{n_1} - \varepsilon_{n_2}} + \frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_1} + \varepsilon_{n'_2}} \right) S_{n'_1, -n'_2, m}^\sigma \right] \\
&\quad \cdot \left[\sum_{M=-J}^J (2J+1) (-1)^M F_{J,M}(-n_2, n_1) F_{J,-M}(n'_1, -n'_2) \right] \\
&\equiv \frac{\alpha_S}{R} \delta_{fg} \delta_{f'g'} \hat{\Gamma}_{q\bar{q}}^{(AN)} \cdot \sum_{J=0}^{\infty} \hat{\mu}_{q\bar{q}}^{(AN)}(J) \hat{W}_{q\bar{q}}^{(AN)}(J) \quad (C.11)
\end{aligned}$$

(ii) qq-System :

Die Wechselwirkung via 1-Gluon Austausch



ist in diesem Fall gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{V}_{qq}^{(EX)} &= g^2 \delta_{f'f} \delta_{g'g} \left[\sum_{a,b} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'c} \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2} \right)_{d'd} \delta^{ab} \right] \\ &\times \left[\sum_{\substack{\sigma, J, M \\ N > 0}} \frac{g^{\sigma\sigma}}{2\omega_m^\sigma} Q_{n'_1, n_1, m}^\sigma \left(\frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_1} - \varepsilon_{n_1}} + \frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_2} - \varepsilon_{n_2}} \right) \tilde{Q}_{n'_2, n_2, m}^\sigma \right] \end{aligned} \quad (C.12)$$

Daraus erhält man, ähnlich wie zuvor, durch Einsetzen der Formeln (B21) und (B22)

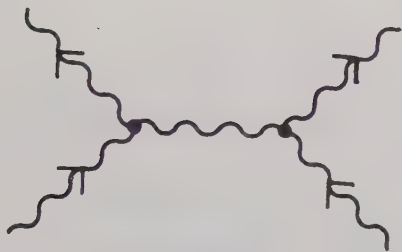
für Q und $\tilde{Q}$

$$\begin{aligned} \hat{V}_{qq}^{(EX)} &= \frac{g^2}{4\pi R} \delta_{f'f} \delta_{g'g} \left[\sum_a \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'c} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{d'd} \right] \\ &\times \sum_{J=0}^{\infty} \left[\sum_{\sigma, N > 0} \frac{g^{\sigma\sigma}}{2\omega_m^\sigma} \frac{\eta^\sigma}{(2J+1)} \right. \\ &\quad \left. S_{n'_1, n_1, m}^\sigma \left(\frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_1} - \varepsilon_{n_1}} + \frac{1}{\omega_m^\sigma + \varepsilon_{n'_2} - \varepsilon_{n_2}} \right) S_{n'_2, n_2, m}^\sigma \right] \\ &\cdot \left[\sum_{M=-J}^J (2J+1) (-1)^M F_{J,M}(n'_1, n_1) F_{J,-M}(n'_2, n_2) \right] \end{aligned}$$

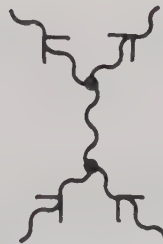
$$\equiv \frac{\alpha_S}{R} \delta_{f'f} \delta_{g'g} \hat{\Gamma}_{qq}^{(EX)} \cdot \sum_{J=0}^{\infty} \hat{\mu}_{qq}^{(EX)}(J) \hat{W}_{qq}^{(EX)}(J) \quad (C.13)$$

C.3 gg - Wechselwirkung in $O(\alpha_S)$

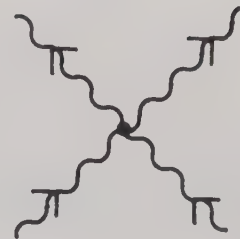
Die Wechselwirkung zweier Gluonen in 1. Ordnung Störungstheorie $\sim O(\alpha_S)$ wird durch die folgenden drei Feynman-Diagramme repräsentiert:



a) 1-Gluon Austausch



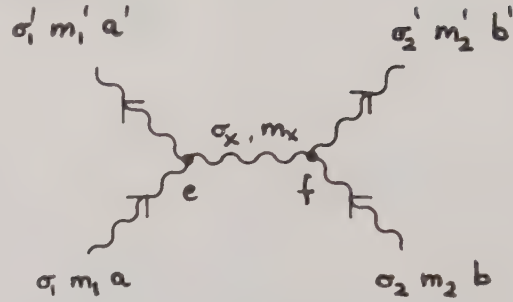
b) Paarvernichtung



c) 4-Gluon Vertex

Durch Anwendung der Feynman-Regeln aus Kap.4, Abschnitt 4.4, übersetzen wir die obigen Diagramme in die entsprechenden Wechselwirkungs-Operatoren $\hat{V}_{gg}$, wobei zu beachten ist, daß die äußeren Gluon-Linien physikalische (!) Gluonen darstellen, für die ausschließlich die beiden transversalen Polarisationen (TE und TM) erlaubt sind.

a) Für die Wechselwirkung via 1-Gluon Austausch



erhält man

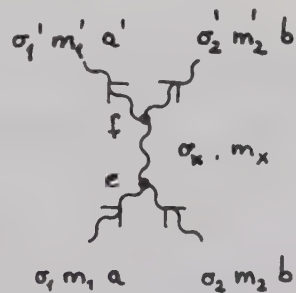
$$\begin{aligned}
 \hat{V}_{gg}^{(EX)} &= (-ig)^2 \left[\sum_{e,f} f^{aa'e} f^{b'b'f} \delta^{ef} \right] \\
 &\times \sum_{\substack{\sigma_z, J_z, M_z \\ N_z > 0}} \left[\frac{\eta^{\sigma'_1} (-1)^{M'_1}}{\sqrt{2\omega_{m'_1}^{\sigma'_1}} 2\omega_{m_1}^{\sigma_1}} \begin{pmatrix} J'_1 & J_z & J_1 \\ -M'_1 & M_z & M_1 \end{pmatrix} \cdot \frac{V(\sigma'_1, \sigma_z, \sigma_1)}{\sqrt{4\pi R}} \right. \\
 &\quad \cdot \eta^{\sigma_z} (-1)^{M_z} \frac{g^{\sigma_z \sigma_z}}{2\omega_{m_z}^{\sigma_z}} \left(\frac{1}{\omega_{m_z}^{\sigma_z} + \omega_{m'_1}^{\sigma'_1} - \omega_{m_1}^{\sigma_1}} + \frac{1}{\omega_{m_z}^{\sigma_z} + \omega_{m'_2}^{\sigma'_2} - \omega_{m_2}^{\sigma_2}} \right) \\
 &\quad \left. \cdot \frac{\eta^{\sigma'_2} (-1)^{M'_2}}{\sqrt{2\omega_{m'_2}^{\sigma'_2}} 2\omega_{m_2}^{\sigma_2}} \begin{pmatrix} J'_2 & J_z & J_2 \\ -M'_2 & -M_z & M_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{V(\sigma'_2, \sigma_z, \sigma_2)}{\sqrt{4\pi R}} \right] \quad (C.14)
 \end{aligned}$$

Die Sortierung der einzelnen Faktoren nach Farb-Anteil radialem und geometrischem Anteil führt auf folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{gg}^{(EX)} &= \frac{g^2}{4\pi R} \left[\sum_e f^{a'ae} f^{b'be} \right] \\
&\times \sum_{J_x=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^{\sigma'_1} \eta^{\sigma'_2}}{4 \sqrt{\omega_{m_1}^{\sigma_1} \omega_{m'_1}^{\sigma'_1} \omega_{m_2}^{\sigma_2} \omega_{m'_2}^{\sigma'_2}}} \sum_{\sigma_x, N_x} \eta^{\sigma_x} (-1)^{M_x} \frac{g^{\sigma_x \sigma_x}}{2 \omega_{m_x}^{\sigma_x}} V(\sigma'_1, \sigma_x, \sigma_1) V(\sigma'_2, \sigma_x, \sigma_2) \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{\omega_{m_x}^{\sigma_x} + \omega_{m'_1}^{\sigma'_1} - \omega_{m_1}^{\sigma_1}} + \frac{1}{\omega_{m_x}^{\sigma_x} + \omega_{m'_2}^{\sigma'_2} - \omega_{m_2}^{\sigma_2}} \right) \left. \right] \\
&\quad \cdot \left[\sum_{M_x} (-1)^{M'_1 + M'_2 + M_x} \begin{pmatrix} J'_1 & J_x & J_1 \\ -M'_1 & M_x & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_2 & J_x & J_2 \\ -M'_2 & -M_x & M_2 \end{pmatrix} \right] \\
&\equiv \frac{\alpha_S}{R} \hat{\Gamma}_{gg}^{(EX)} \cdot \sum_{J_x=0}^{\infty} \hat{\mu}_{gg}^{(EX)}(J_x) \hat{\mathcal{W}}_{gg}^{(EX)}(J_x) \tag{C.15}
\end{aligned}$$

Hierin sind die $V(\sigma_i, \sigma_x, \sigma_j)$ die reduzierten Vertexfunktionen für die 3-Gluon Vertizes nach Anhang B, Abschnitt B3, Gl.(B33)-(B44).

b) Für die Wechselwirkung via gg -Vernichtung



ergibt sich dagegen

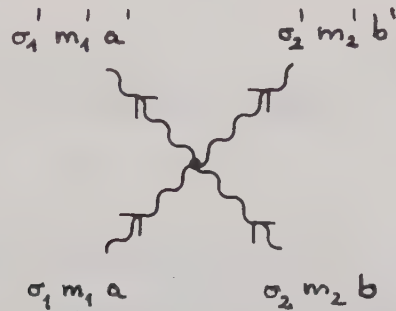
$$\begin{aligned}
\hat{V}_{gg}^{(AN)} &= (-ig)^2 \left[\sum_{e,f} f^{bae} f^{a'b'f} \delta^{ef} \right] \\
&\times \sum_{\substack{\sigma_z, J_z, M_z \\ N_z > 0}} \left[\frac{\eta^{\sigma'_1} (-1)^{M'_1} \eta^{\sigma'_2} (-1)^{M'_2}}{\sqrt{2\omega_{m'_1}^{\sigma'_1} 2\omega_{m'_2}^{\sigma'_2}}} \begin{pmatrix} J'_1 & J_z & J'_2 \\ -M'_1 & -M_z & -M'_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{V(\sigma'_1, \sigma_z, \sigma'_2)}{\sqrt{4\pi R}} \right. \\
&\quad \cdot \eta^{\sigma_z} (-1)^{M_z} \frac{g^{\sigma_z \sigma_z}}{2\omega_{m_z}^{\sigma_z}} \left(\frac{1}{\omega_{m_z}^{\sigma_z} + \omega_{m'_1}^{\sigma'_1} + \omega_{m'_2}^{\sigma'_2}} + \frac{1}{\omega_{m_z}^{\sigma_z} - \omega_{m'_1}^{\sigma'_1} - \omega_{m'_2}^{\sigma'_2}} \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\omega_{m_1}^{\sigma_1} 2\omega_{m_2}^{\sigma_2}}} \begin{pmatrix} J_1 & J_z & J_2 \\ M_1 & M_z & M_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{V(\sigma_1, \sigma_z, \sigma_2)}{\sqrt{4\pi R}} \left. \right]
\end{aligned} \tag{C.16}$$

oder, nach sortieren der einzelnen Faktoren

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{gg}^{(AN)} &= \frac{g^2}{4\pi R} \left[\sum_e f^{abe} f^{a'b'e} \right] \\
&\times \sum_{J_z=0}^{\infty} \left[\frac{\eta^{\sigma'_1} \eta^{\sigma'_2}}{4 \sqrt{\omega_{m_1}^{\sigma_1} \omega_{m'_1}^{\sigma'_1} \omega_{m_2}^{\sigma_2} \omega_{m'_2}^{\sigma'_2}}} \sum_{\sigma_z, N_z} \eta^{\sigma_z} (-1)^{M_z} \frac{g^{\sigma_z \sigma_z}}{2\omega_{m_z}^{\sigma_z}} V(\sigma'_1, \sigma_z, \sigma'_2) V(\sigma_1, \sigma_z, \sigma_2) \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{\omega_{m_z}^{\sigma_z} + \omega_{m'_1}^{\sigma'_1} + \omega_{m'_2}^{\sigma'_2}} + \frac{1}{\omega_{m_z}^{\sigma_z} - \omega_{m'_1}^{\sigma'_1} - \omega_{m'_2}^{\sigma'_2}} \right) \left. \right] \\
&\quad \cdot \left[\sum_{M_z} (-1)^{M'_1 + M'_2 + M_z} \begin{pmatrix} J'_1 & J_z & J'_2 \\ -M'_1 & -M_z & -M'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & J_z & J_2 \\ M_1 & M_z & M_2 \end{pmatrix} \right] \\
&\equiv \frac{\alpha_S}{R} \hat{\Gamma}_{gg}^{(AN)} \cdot \sum_{J_z=0}^{\infty} \hat{\mu}_{gg}^{(AN)}(J_z) \hat{\mathcal{W}}_{gg}^{(AN)}(J_z)
\end{aligned} \tag{C.17}$$

Dabei sind die reduzierten Vertexfunktionen $V^{(\sigma_i, \sigma_s, \sigma_j)}$ durch Gl.(B33)-(B44) in Anhang B, Abschnitt B3 gegeben.

c) Die Wechselwirkung via 4-Gluon Punkt-Vertex



reduziert sich in Falle von zwei transversalen in den Vertex einlaufenden und zwei transversalen auslaufenden Gluonen auf den Punkt-Vertex für 4 raumartige Gluonen nach Gl.(B45), Anhang B, Abschnitt B3. Damit ergibt sich:

$$\hat{V}_{gg}^{(PV)} = -g^2 \left[\sum_x f^{aa'x} f^{bb'x} \right] \cdot \left[2 F_{1\dot{1}', 2\dot{2}'} - F_{12, \dot{1}'\dot{2}'} - F_{1\dot{2}', 2\dot{1}'} \right] \quad (C.18)$$

Einsetzen der expliziten Ausdrücke für die $F_{i,j,k,l}$ aus Anhang B, Gl.(B48), und der Faktoren für die externen Gluon-Linien liefert:

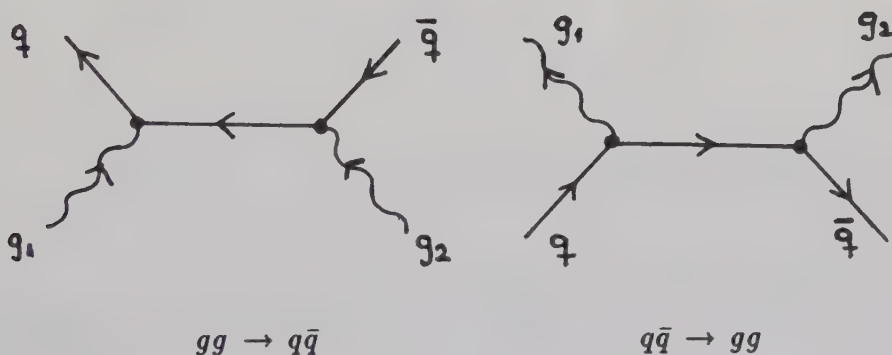
$$\begin{aligned}
\hat{V}_{gg}^{(PV)} &= \frac{g^2}{4\pi R} \left[\sum_x f^{aa'x} f^{bb'x} \right] \cdot \left[\frac{\eta^{\sigma'_1} (-1)^{M'_1} \eta^{\sigma'_2} (-1)^{M'_2}}{\sqrt{2\omega_{m_1}^{\sigma_1} 2\omega_{m_2}^{\sigma_2} 2\omega_{m'_1}^{\sigma'_1} 2\omega_{m'_2}^{\sigma'_2}}} \right] \\
&\times \sum_{J_x=0}^{\infty} \left[V(\sigma_1, \sigma_2; \sigma'_1, \sigma'_2) \cdot \left\{ \sum_{M_x} (-1)^{M_x} (2J_x + 1) \right. \right. \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_x \\ M_1 & M_2 & M_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_1 & J'_2 & J_x \\ -M'_1 & -M'_2 & -M_x \end{pmatrix} \left. \right\} \\
&\quad + V(\sigma_1, \sigma'_2; \sigma_2, \sigma'_1) \cdot \left\{ \sum_{M_x} (-1)^{M_x} (2J_x + 1) \right. \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} J_1 & J'_2 & J_x \\ M_1 & -M'_2 & M_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & J'_1 & J_x \\ M_2 & -M'_1 & -M_x \end{pmatrix} \left. \right\} \\
&\quad - 2 V(\sigma_1, \sigma'_1; \sigma_2, \sigma'_2) \cdot \left\{ \sum_{M_x} (-1)^{M_x} (2J_x + 1) \right. \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} J_1 & J'_1 & J_x \\ M_1 & -M'_1 & M_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 & J'_2 & J_x \\ M_2 & -M'_2 & -M_x \end{pmatrix} \left. \right\} \left. \right] \\
&\equiv \frac{\alpha_S}{R} \hat{\Gamma}_{gg}^{(PV)} \cdot \sum_{J_x=0}^{\infty} \left[\hat{\mu}_A^{(PV)}(J_x) \hat{\mathcal{W}}_A^{(PV)}(J_x) \right. \\
&\quad \left. + \hat{\mu}_B^{(PV)}(J_x) \hat{\mathcal{W}}_B^{(PV)}(J_x) - 2 \hat{\mu}_C^{(PV)}(J_x) \hat{\mathcal{W}}_C^{(PV)}(J_x) \right]
\end{aligned}
\tag{C.19}$$

Die reduzierten Vertexfunktionen $V^{(\sigma_i, \sigma_j; \sigma_k, \sigma_l)}$ für 2 einlaufende und zwei auslaufende transversale (!) Gluonen sind durch die Formeln (B49) und (B50) in Anhang B, Abschnitt B4 gegeben.

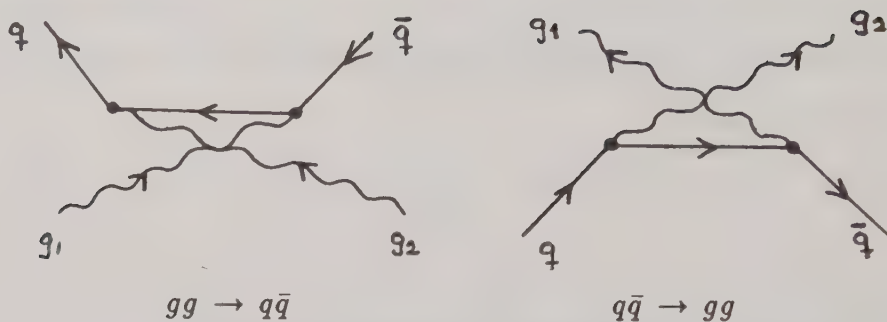
C.4 $(gg \leftrightarrow q\bar{q})$ - Wechselwirkung in $O(\alpha_S)$

Die Wechselwirkung eines Gluon-Paares mit einem Quark-Antiquark Paar, die wir in Kapitel 7 zur Berechnung der Meson-Glueball Mischungen im $(\eta - \eta' - \iota)$ -System in Betracht gezogen haben, wird in 1. Ordnung Störungstheorie $\sim O(\alpha_S)$ wird durch die folgenden Feynman-Diagramme dargestellt:

a) 'Direkt-Diagramme':



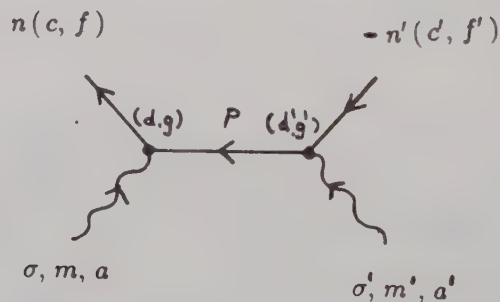
b) 'Austausch-Diagramme':



Wie zuvor erhält man die entsprechenden Wechselwirkungs-Operatoren $\hat{V}_{gg \rightarrow q\bar{q}}$ und $\hat{V}_{q\bar{q} \rightarrow gg}$ durch Anwendung der Feynman-Regeln aus Kap.4, Abschnitt 4.4:

a) 'Direkt-Diagramme':

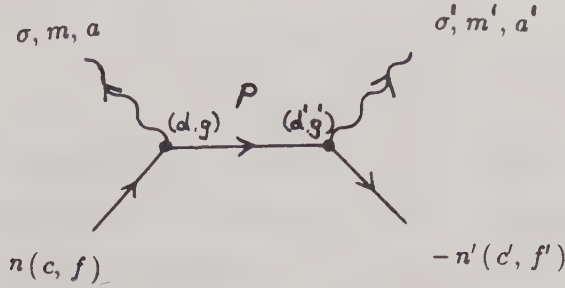
Für das Diagramm mit zwei *einlaufenden* transversalen Gluonen und einem *auslaufenden* Quark-Antiquark Paar



erhält man:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{gg \rightarrow q\bar{q}}^{(DIR)} = & g^2 \delta_{ff'} \left[\sum_{d, d'} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{cd} \left(\frac{\hat{\lambda}^{a'}}{2} \right)_{d'c'} \delta^{dd'} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_m^\sigma 2\omega_{m'}^{\sigma'}}} \right] \\ & \times \sum_p \left[\frac{Q_{n, p, m}^\sigma Q_{p, -n', m'}^{\sigma'}}{\varepsilon_p + \varepsilon_{n'} - \omega_{m'}^{\sigma'}} - \frac{Q_{n, -p, m}^\sigma Q_{-p, -n', m'}^{\sigma'}}{\varepsilon_p + \varepsilon_n - \omega_m^\sigma} \right] \end{aligned} \quad (C.20)$$

Für das Diagramm mit einem *einlaufenden* Quark-Antiquark Paar und zwei *auslaufenden* transversalen Gluonen



ergibt sich dagegen:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{q\bar{q} \rightarrow gg}^{(DIR)} &= g^2 \delta_{ff'} \left[\sum_{d, d'} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{dc} \left(\frac{\hat{\lambda}^{a'}}{2} \right)_{c'd'} \delta_{dd'} \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2\omega_m^\sigma} \sqrt{2\omega_{m'}^{\sigma'}}} \right] \\ &\times \sum_p \left[\frac{\tilde{Q}_{-p, n, m}^\sigma \tilde{Q}_{-n', -p, m'}^{\sigma'}}{\varepsilon_p - \varepsilon_{n'} + \omega_{m'}^{\sigma'}} - \frac{\tilde{Q}_{p, n, m}^\sigma \tilde{Q}_{-n', p, m'}^{\sigma'}}{\varepsilon_p - \varepsilon_n + \omega_m^\sigma} \right] \end{aligned} \quad (C.21)$$

Einsetzen der Formeln (B21) und (B22) für die Vertexfunktionen Q und $\tilde{Q}$ (Anhang B, Abschnitt B2), sowie Sortierung der einzelnen Faktoren nach Farb-Anteil, radialem und geometrischem Anteil liefert:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{gg \rightarrow q\bar{q}}^{(DIR)} &= \frac{g^2}{4\pi R} \delta_{ff'} \left[\sum_d \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{cd} \left(\frac{\hat{\lambda}^{a'}}{2} \right)_{dc'} \right] \\ &\times \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{\substack{\nu > 0 \\ \kappa = \pm p}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_m^\sigma} \omega_{m'}^{\sigma'}} \frac{1}{\sqrt{(2J+1)(2J'+1)}} \right. \\ &\quad \cdot \left(\frac{S_{n, p, m}^\sigma S_{p, -n', m'}^{\sigma'}}{\varepsilon_p + \varepsilon_{n'} - \omega_{m'}^{\sigma'}} - \frac{S_{n, -p, m}^\sigma S_{-p, -n', m'}^{\sigma'}}{\varepsilon_p + \varepsilon_n - \omega_m^\sigma} \right) \left. \right] \\ &\cdot \left[\sum_{\substack{\mu \\ (\kappa = p)}} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} F_{J, M}(n, p) F_{J', M'}(p, -n') \right] \\ &\equiv \frac{\alpha_S}{R} \delta_{ff'} \hat{\Gamma}_{gg \rightarrow q\bar{q}} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\mu}_{gg \rightarrow q\bar{q}}(p) \hat{\mathcal{W}}_{gg \rightarrow q\bar{q}}(p) \end{aligned} \quad (C.22)$$

und

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{q\bar{q} \rightarrow gg}^{(DIR)} &= \frac{g^2}{4\pi R} \delta_{ff'} \left[\sum_d \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{dc} \left(\frac{\hat{\lambda}^{a'}}{2} \right)_{c'd} \right] \\
&\times \sum_{p=1}^{\infty} \left[\sum_{\substack{\nu > 0 \\ \kappa = \pm p}} \frac{\eta^\sigma \eta^{\sigma'}}{2 \sqrt{\omega_m^\sigma \omega_{m'}^{\sigma'}}} \frac{1}{\sqrt{(2J+1)(2J'+1)}} \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{S_{-p,n,m}^\sigma S_{-n',-p,m'}^{\sigma'}}{\varepsilon_p - \varepsilon_{n'} + \omega_{m'}^{\sigma'}} - \frac{S_{p,n,m}^\sigma S_{-n',p,m'}^{\sigma'}}{\varepsilon_p - \varepsilon_n + \omega_m^\sigma} \right) \left. \right] \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\substack{\mu \\ (\kappa=p)}} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} (-1)^{M+M'} \right. \\
&\quad \cdot F_{J,M}(-p, n) F_{J',M'}(-n', -p) \left. \right] \\
&\equiv \frac{\alpha_S}{R} \delta_{ff'} \hat{\Gamma}_{q\bar{q} \rightarrow gg} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\mu}_{q\bar{q} \rightarrow gg}(p) \hat{\mathcal{W}}_{q\bar{q} \rightarrow gg}(p)
\end{aligned} \tag{C.23}$$

b) 'Austausch-Diagramme':

Die Wechselwirkungs-Operatoren für die Austausch-Diagramme, $\hat{V}_{gg \rightarrow q\bar{q}}^{(EXC)}$ und $\hat{V}_{q\bar{q} \rightarrow gg}^{(EXC)}$, erhält man aus den Gleichungen (C17), (C19) bzw. (C18), (C20) einfach durch Vertauschung der beiden Gluonen, d.h. durch die Substitutionen $(\sigma, m, a) \leftrightarrow (\sigma', m', a')$.

C.5 Matrixelemente der Wechselwirkungs-Operatoren $\hat{V}$

Die Wechselwirkungs-Amplituden der 2-Teilchen Systeme $(q\bar{q})$, (qq) , bzw. (gg) für die verschiedenen Wechselwirkungs-Prozesse aus den vorangegangenen Abschnitten C2 - C4 sind durch die Matrixelemente der entsprechenden Operatoren $\hat{V}_{(12;1'2')}$ zwischen bestimmten 2-Teilchen Zuständen $|1, 2\rangle$ und $|1', 2'\rangle$ gegeben. Diese Operatoren faktorisieren, wie wir gesehen haben, durchweg in einen *Farb-Anteil*, einen *radialen Anteil*, der die spezifische Struktur der Wechselwirkung beinhaltet, sowie in einen *geometrischen Anteil*, welcher im wesentlichen aus einer Kombination von Wigner-Koeffizienten besteht, die von den Integrationen über die Raumwinkel herrühren. Daher lassen sich die Wechselwirkungs-Operatoren stets in der folgenden Form darstellen:

$$\hat{V}_{(12;1'2')} = \frac{\alpha_S}{R} \cdot \hat{\Gamma} \cdot \sum_{\mathcal{J}} \hat{\mu}(\mathcal{J}) \hat{W}(\mathcal{J}) \quad (\text{C.24})$$

(Vgl. Gleichungen (C10), (C11), (C13), (C15), (C17), (C19) und (C22), (C23)).

Wir berechnen die Matrixelemente der Operatoren $\hat{V}_{(12;1'2')}$ mit den physikalischen, externen 2-Teilchen Zuständen, die durch Gl.(C4) gegeben sind, mitteln dabei über alle möglichen, nicht beobachtbaren Anfangszustände s_α mit einem Faktor $1/f_\alpha$ und summieren über die nicht beobachtbaren Endzustände s_β :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\alpha\beta}(1, 2 \rightarrow 1', 2') &\equiv \frac{1}{f_\alpha} \sum_{s_\alpha} \sum_{s_\beta} \langle (1', 2')_\beta | \hat{V}_{(12;1'2')} | (1, 2)_\alpha \rangle \\
&= \frac{\alpha_S}{R} \cdot \left[\frac{1}{f_K} \sum_{K, K'} \langle (N'_1, N'_2) N, K' | \hat{\Gamma} | (N_1, N_2) N, K \rangle \right] \\
&\quad \cdot \left[\sum_{\mathcal{J}} \left(\langle (\beta'_1, \beta'_2) | \hat{\mu}(\mathcal{J}) | (\alpha_1, \alpha_2) \rangle \right. \right. \\
&\quad \cdot \left. \left. \frac{1}{f_M} \sum_{M, M'} \langle (j'_1, j'_2) J, M' | \hat{W}(\mathcal{J}) | (j_1, j_2) J, M \rangle \right) \right]
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Die Gesamtamplituden erhält man dann durch Aufsummierung aller möglichen Permutationen der externen Linien in den Feynman-Diagrammen, d.h.

$$\begin{aligned}
\Delta(1, 2 \rightarrow 1', 2') &= S_{12;1'2'} z_{12;1'2'} \cdot \mathcal{M}(1, 2 \rightarrow 1', 2') \\
&\quad + S_{12;2'1'} z_{12;2'1'} \cdot \mathcal{M}(1, 2 \rightarrow 2', 1') \\
&\quad + S_{21;1'2'} z_{21;1'2'} \cdot \mathcal{M}(2, 1 \rightarrow 1', 2') \\
&\quad + S_{21;2'1'} z_{21;2'1'} \cdot \mathcal{M}(2, 1 \rightarrow 2', 1')
\end{aligned} \tag{C.26}$$

Hierbei haben wir entsprechen den Feynman-Regeln aus Kap.4, Abschnitt 4.4, für jedes Matricelement $\mathcal{M}$ einen statistischen Wichtungsfaktor $S = \Pi_k \frac{1}{g_k!}$ berücksichtigt, falls im Endzustand g_k identische Teilchen der Sorte k vorhanden sind, sowie jeweils ein absolutes Vorzeichen $z = \pm$, wobei $z = -1$ für Vertauschung zweier

Quark-Linien und $z = +1$ für Vertauschung zweier Gluon-Linien ist.

Mit (C26), (C25) und den Formeln aus den Abschnitten C2, C3 und C4 sind also die Gesamtamplituden für die verschiedenen Wechselwirkungs-Prozesse der 2-Teilchen Systeme $(q\bar{q})$, (qq) , bzw. (gg) gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \Delta(q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}) &= \Delta\left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \searrow \quad \nearrow \end{array}\right) + \Delta\left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array}\right) \\
 \Delta(qq \rightarrow qq) &= \Delta\left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \searrow \quad \nearrow \end{array}\right) \\
 \Delta(gg \rightarrow gg) &= \Delta\left(\begin{array}{c} \text{wavy} \quad \text{wavy} \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{wavy} \quad \text{wavy} \end{array}\right) + \Delta\left(\begin{array}{c} \text{wavy} \quad \text{wavy} \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{wavy} \quad \text{wavy} \end{array}\right) + \Delta\left(\begin{array}{c} \text{wavy} \quad \text{wavy} \\ \bullet \quad \bullet \\ \text{wavy} \quad \text{wavy} \end{array}\right) \\
 \Delta(gg \leftrightarrow q\bar{q}) &= \Delta\left(\begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \searrow \quad \nearrow \end{array}\right) + \Delta\left(\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array}\right)
 \end{aligned}
 \tag{C.27}$$

D SU(3) - Farbkopplung von Quarks und Gluonen zu zusammengesetzten Zuständen

D.1 Die Generatoren der SU(3)

Um unsere Notation einzuführen, geben wir eine kurze Zusammenstellung der wichtigsten Relationen der SU(3)-Symmetriegruppe und ihrer Algebra.

Die Generatoren der SU(3) sind hermitesche, spurlose (3×3) -Matrizen, die eine geschlossene Lie-Algebra bilden. Wir bezeichnen sie mit:

$$\hat{T}^a, \quad (a = 1, \dots, 8) \quad (\text{D.1})$$

Die $\hat{T}^a$ genügen den Vertauschungs-Relationen

$$[\hat{T}^a, \hat{T}^b] = i f^{abc} \hat{T}^c \quad (\text{D.2})$$

mit den vollständig *antisymmetrischen* Strukturkonstanten

$$f^{abc} = -f^{bac} = -f^{acb} \quad (\text{D.3})$$

sowie den Antivertauschungs-Relationen

$$\{ \hat{T}^a, \hat{T}^b \}_+ = \frac{1}{3} \delta^{ab} + d^{abc} \hat{T}^c \quad (\text{D.4})$$

mit den vollständig *symmetrischen* Strukturkonstanten

$$d^{abc} = d^{bac} = d^{acb} = \dots \quad (\text{D.5})$$

Die Casimir-Operatoren der SU(3), deren Eigenwerte die irreduziblen Darstellungen charakterisieren, sind gegeben durch:

$$\hat{C}_1 = \sum_{a=1}^8 (\hat{T}^a)^2 \quad (\text{D.6})$$

$$\hat{C}_2 = \sum_{a,b,c=1}^8 d^{abc} \hat{T}^a \hat{T}^b \hat{T}^c \quad (\text{D.7})$$

In der fundamentalen Darstellung ist

$$\hat{T}^a = \begin{cases} \frac{\hat{\lambda}^a}{2} & \text{für Quarks} \\ \left(\frac{-\hat{\lambda}^a}{2} \right)^t & \text{für Antiquarks} \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

wobei die $\hat{\lambda}^a$ die üblichen Gell-Mann Matrizen sind und das Superskript t die transponierte Matrix bezeichnet.

Die $\hat{\lambda}^a$, ($a = 1, \dots, 8$), haben die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 \hat{\lambda}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \hat{\lambda}^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \hat{\lambda}^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{D.9}$$

Die adjungierten Darstellung ist charakterisiert durch die Matrixelemente

$$(\hat{T}^a)_{bc} = -i f^{abc}
 \tag{D.10}$$

D.2 Farb-Kopplung von Quarks und Gluonen

Wir charakterisieren die 'Farbladungs-Zustände' von Quarks, Gluonen, sowie deren zusammengesetzter Systeme durch die irreduziblen Darstellungen der SU(3),

$$\mathcal{D}(p, q)
 \tag{D.11}$$

Die ganzen Zahlen p und q spezifizieren eine bestimmte irreduzible Darstellung mit der Dimension

$$N(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) \tag{D.12}$$

mit dem Eigenwert des Casimir-Operators $\hat{C}_1$ aus Gleichung (D6),

$$C(p,q) \equiv <\hat{T}^2> = \frac{1}{3}(p^2 + pq + q^2) + p + q \tag{D.13}$$

Die Notation, die wir verwenden ist in der folgenden Tabelle D1 verdeutlicht.

Teilchen	$\mathcal{D}(p,q)$	p	q	$N(p,q)$	$C(p,q)$
Physikalische Teilchen	Singlett $\{1\}$	0	0	1	0
Quarks	Triplett $\{3\}$	1	0	3	4/3
Antiquarks	Antitriplett $\{\bar{3}\}$	0	1	3	4/3
Gluonen, Geister	Oktett $\{8\}$	1	1	8	3

Tabelle D1 : Die niedrigsten irreduziblen Darstellungen der SU(3), sowie deren Dimension und die zugehörigen Eigenwerte des Casimir-Operators $\hat{C}_1$.

Die Farbkopplung mehrerer Einteilchen-Zustände zu einem zusammengesetzten N-Teilchen Zustand charakterisieren wir dementsprechend durch die Eigenwerte $C(P, Q)$,

$$C(P, Q) \equiv \left\langle \left(\sum_{i=1}^N \hat{T}_i \right)^2 \right\rangle \quad (D.14)$$

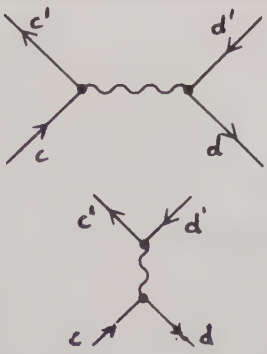
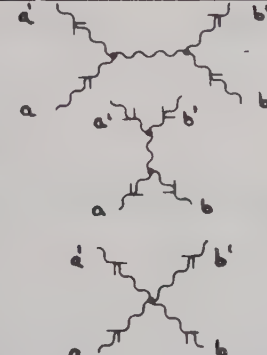
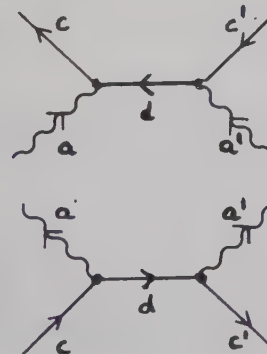
Insbesondere folgt daraus für 2-Teilchen Zustände:

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_1 \cdot \hat{T}_2 \rangle &= \frac{1}{2} \langle (\hat{T}_1 + \hat{T}_2)^2 - (\hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[C(P, Q) - C(p_1, q_1) - C(p_2, q_2) \right] \end{aligned} \quad (D.15)$$

Unter Verwendung der obigen Formeln lassen sich die Farbfaktoren in den Matrixelementen für die verschiedenen wechselwirkenden 2-Teilchen Systeme nach der in Anhang C, Abschnitt C5 erläuterten Methode (vgl. Gl.(C25)) berechnen. Die Resultate für die Wechselwirkungs-Prozesse, die wir in Anhang C, Abschnitte C2 - C4, betrachtet haben, sind in der nachstehenden Tabelle D2 zusammengestellt.

Tabelle D2 : (nachfolgende Seite)

Die Farbfaktoren $\langle \hat{\Gamma} \rangle$ in den Matrixelementen aus Gl.(C25) für die verschiedenen Wechselwirkungs-Prozesse der 2-Teilchen Systeme aus Anhang C, Abschnitte C2 - C4. Die Erwartungswerte $\langle \hat{\Gamma} \rangle$ ergeben sich durch Berechnung der 'Farb-Matrixelemente' der Operatoren $\hat{\Gamma}$ mit den zusammengesetzten Zuständen (C5), entsprechend dem in Abschnitt C5 erläuterten Konzept.

Diagramm	2-Teilchen Zustände	Irr. Darstellung $\mathcal{D}(P, Q)$	Operator $\hat{\Gamma}$	Erwartungswert $\langle \hat{\Gamma} \rangle$
	$q\bar{q}$	Singlett {1}	$\sum_a \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'c} \left(\frac{-\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{dd'}$ $\sum_a \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{dc} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'd'}$	$-4/3$ 0
	qq	Triplett {3}	$\sum_a \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{c'c} \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{d'd}$	$-2/3$
	gg	Singlett {1}	$\sum_e f^{a'ac} f^{b'be}$ $\sum_e f^{abe} f^{a'b'e}$ $\sum_e f^{aa'e} f^{bb'e}$	-3 -3 -3
	$gg \rightarrow q\bar{q}$ $q\bar{q} \rightarrow gg$	Singlett {1}	$\sum_d \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{cd} \left(\frac{\hat{\lambda}^{a'}}{2} \right)_{dc'}$ $\sum_d \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \right)_{dc} \left(\frac{\hat{\lambda}^{a'}}{2} \right)_{c'd}$	$1/2$ $4/3$

E Notation und Einheiten

E.1 Raum-Zeit Koordinaten

Wir verwenden die Minkowski Metrik $g^{\mu\nu}$ mit

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\ g^\mu_\nu &= \delta^\mu_\nu \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Griechische Indizes ($\mu, \nu, \dots$) können die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen, lateinische Indizes ($k, l, \dots$) die Werte 1, 2, 3, wenn sie sich auf die Raum-Zeit Koordinaten beziehen.

Wir benutzen die Summationskonvention, daß über doppelt auftretende Indizes summiert wird, d.h.

$$\sum_\mu a_\mu b^\mu \equiv a_\mu b^\mu \quad (\text{E.2})$$

Kontravariante Vierervektoren

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) \quad (\text{E.3})$$

und kovariante Vierektoren

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\vec{x}) \quad (\text{E.4})$$

sind durch den metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$ verknüpft über

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{E.5})$$

und

$$x^o = x_o \quad , \quad x_k = -x^k \quad (\text{E.6})$$

E.2 Dirac Matrizen

Wir verwenden die Darstellung der (4×4) , Dirac Matrizen nach J.D.Bjorken, S.D.Drell (BD 64):

$$\gamma^\mu = (\gamma^o, \vec{\gamma}) \quad (\text{E.7})$$

$$\gamma^o = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & \hat{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.8})$$

mit der (2×2) , Einheitsmatrix

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.9})$$

und den (2×2) , Pauli Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{E.10})$$

Die γ^μ genügen den Antivertauschungs-Relationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{E.11})$$

E.3 Drehimpulse

Wir verwenden die gewöhnlichen $3j$ -, $6j$ - und $9j$ -Symbole, Kugelflächenfunktionen $Y_{j,m}$, Vektor-Kugelflächenfunktionen $\vec{Y}_{j,l,m}$ und sphärische Spinoren χ_κ^μ in der Notation von A.R.Edmonds (Ed 57).

E.4 Einheiten

Wir benutzen durchweg natürliche Einheiten

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{E.12})$$

Die korrekten Faktoren mit $\hbar$ und c in den Formeln dieser Arbeit erhält man einfach durch Dimensionsbetrachtungen; z.B. ist in Gl.(A14) die Ersetzung

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{\varepsilon_n}{\hbar c} R \\ \xi_f &= \frac{m_f c^2}{\hbar c} R \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

vorzunehmen.

Nützliche Relationen zur Umrechnung der Einheiten sind:

$$\begin{aligned} \hbar c &= 197.3285851 \text{ MeV fm} \\ 1 \text{ GeV} &= 5.06768963 \hbar c \text{ fm}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Literaturverzeichnis

- Ba 81** T. Barnes, *Z. Phys.* **C11** (1981), 135; *Z. Phys.* **C10** (1981), 275.
- Ba 82** T. Barnes, F. E. Close, S. Monaghan, *Nucl. Phys.* **B198** (1982), 380; *Phys. Lett.* **B110** (1982), 159.
- Ba 84** J. Bartelski, A. Szymacha, L. Mankiewicz, S. Tatur, *Phys. Rev.* **D29** (1984), 1035.
- Ba 85** R. M. Baltusaitis et al., *Phys. Rev.* **D32** (1985), 2883.
- Baa 83** J. Baacke, Y. Igarashi, G. Kasperidus, *Z. Phys.* **C17** (1983), 161; J. Baacke, Y. Igarashi, H. Usler, *Z. Phys.* **C21** (1983), 127; J. Baacke, Y. Igarashi, *Phys. Rev.* **D27** (1983), 460.
- Bag 86** S. Baghi, *Phys. Lett.* **B178** (1986), 305.
- Bas 88** S. Basu, A. Lahiri, *Phys. Rev.* **D37** (1988), 1250.
- Be 76** C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Ann. Phys.* **98** (1976), 287.
- Bl 50** K. Bleuler, *Helv. Phys. Acta* **23** (1950), 567.
- Bl 81** D. Bloom in *Proceedings of the 9th SLAC Summer Institute on Particle Physics* (1981), edited by A. Mosher.
- Bj 64** J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw Hill (1964), Bd.1 und 2.
- Br 79** G. E. Brown, M. Rho, *Phys. Lett.* **B82** (1979), 177; G. E. Brown, M. Rho, V. Vento, *Phys. Lett.* **B84** (1979), 383;
- Br 82** J. D. Breit, *Preprint* CU-TP-229, Cornell University, (1982), unveröffentlicht.

- Br 83 S. Brodsky, G. Lepage, P. Mackenzie, *Phys. Rev. D* **28** (1983), 228.
- Bu 88 R. Buser, R. D. Viollier, P. Zimak, *Int. Jour. of Theor. Phys.* **27** (1988), 925.
- Ca 82 C. E. Carlson, T. H. Hansson, *Nucl. Phys. B* **199** (1982), 441.
- Ca 83 C. E. Carlson, T. H. Hansson, C. Peterson, *Phys. Rev. D* **27** (1983), 1556; Erratum, *Phys. Rev. D* **28** (1983), 2895; *Phys. Rev. D* **27** (1983), 2167.
- Ca 84 C. E. Carlson, T. H. Hansson, C. Petreson, *Phys. Rev. D* **30** (1984), 1594.
- Ch 74 A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, V. F. Weißkopf, *Phys. Rev. D* **9** (1974), 3471;
A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, *Phys. Rev. D* **10** (1974), 2599.
- Cha 83 M. Chanowitz, S. Sharpe, *Nucl. Phys. B* **222** (1983), 211.
- Cha 85 M. Chanowitz, *Phys. Lett. B* **164** (1985), 379.
- Chu 88 S. U. Chung, 'Brookhaven Workshop on Glueballs, Hybrids and Exotics', *CERN Courier* **12/88** (1988), 25.
- Cl 81 F. E. Close, S. Monaghan, *Phys. Rev. D* **23** (1981), 2098.
- Cl 83 L. J. Clavelli, G. W. Intemann, *Phys. Rev. D* **28** (1983), 2767.
- Cl 88 F. E. Close, *Rep. Prog. Phys.* **51** (1988), 833.
- DeG 75 T. De Grand, R. L. Jaffe, K. Johnson, J. Kiskis, *Phys. Rev. D* **12** (1975), 2060.
- DeS 63 J. De Swart, *Rev. Mod. Phys.* **35** (1963), 916.

- DeT 81** C. De Tar, *Phys. Rev.* **D24** (1981), 752, 762.
- Do 75** J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein, *Phys. Rev.* **D9** (1975), 2875.
- Do 76** J. F. Donoghue, E. Golowich, *Phys. Rev.* **D14** (1976), 1386.
- Do 80** J. F. Donoghue, K. Johnson, *Phys. Rev.* **D21** (1980), 1975.
- Do 83** J. F. Donoghue, H. Gomm, *Phys. Rev.* **D28** (1983), 2800.
- Do 84** J. F. Donoghue, *Phys. Rev.* **D30** (1984), 114.
- Ed 64** A. R. Edmonds, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, Verlag Bibl. Inst., (1964).
- Fa 67** L. D. Fadeev, V. N. Popos, *Phys. Lett.* **B25** (1967), 29.
- Fe 69** B. T. Feld, *Models of Elementary Particles*, Blaisdell Publishing Company, (1969).
- Fe 71** A. L. Fetter, J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems*, McGraw Hill, (1971).
- Fi 79** R. D. Field, *Physica Scripta* **19** (1979), 131.
- Fl 83** M. Flensburg, C. Peterson, L. Sköld, *Z. Phys.* **C22** (1983), 293.
- Fr 73** H. Fritsch, M. Gell Mann, H. Leutwylr, *Phys. Lett.* **B47** (1973), 365.
- Fr 77** R. Friedberg, T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D15** (1977), 1694; *Phys. Rev.* **D16** (1977), 1096.
- Fr 78** R. Friedberg, T. D. Lee, *Phys. Rev.* **D18** (1978), 2623.
- Fr 84** M. Frank, P. J. O'Donnell, *Phys. Lett.* **B144** (1984), 451; *Phys. Rev.* **D29** (1984), 921.
- Fr 85** M. Frank, P. J. O'Donnell, *Phys. Rev.* **D32** (1985), 1739.

- Ge 51** M. Gell Mann, F. Low, *Phys. Rev.* **84** (1951), 350.
- Go 57** J. Goldstone, *Proc. Roy. Soc.* **A239** (1957), 267.
- Go 83** S. Goldhaber, T. H. Hansson, R. L. Jaffe, *Phys. Lett.* **B131** (1983), 445.
- Go 86** S. Goldhaber, R. L. Jaffe, T. H. Hansson, *Nucl. Phys.* **B277** (1986), 674.
- Gr 73** D. J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D8** (1973), 3633; *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1343.
- Gu 50** S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc.* **A63** (1950), 681.
- Gu 81** B. Guberina, R. Meckbach, R. D. Peccei, R. Rückl, *Nucl. Phys.* **B184** (1981), 476.
- Ha 82** T. H. Hansson, K. Johnson, C. Peterson, *Phys. Rev.* **D26** (1982), 2069.
- Ha 83** T. H. Hansson, R. L. Jaffe, *Phys. Rev.* **D28** (1983), 882.
- Ha 85** H. E. Haber, J. Perrier, *Phys. Rev.* **D32** (1985), 2961.
- Hi 83** D. Hitlin in 11th *International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies*, Cornell University, (1983).
- Ii 66** J. Iizuka, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **37/38** (1966), 21.
- It 85** C. Itzykson, J. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill, (1985).
- Ka 83** E. Kawai, *Phys. Lett.* **B124** (1983), 262.
- Ko 76** H. Kowalski, T. F. Walsh, *Phys. Rev.* **D14** (1976), 852.
- Ko 86** K. Konigsmann, *Phys. Rep.* **139** (1986), 244, und Referenzen darin.
- Ko 87** H. Koch, *Phys. Bl.* **43** (1987), 152.

- Ku 79** T. Kugo, I. Ojima, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **66** (1979), 1.
- Lee 82** T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harwood Academic Publishes, (1982).
- Li 84** A. Lindner, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, Verlag Teubner, (1984).
- Ma 81** P. McKenzie, G. Lepage, *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981), 1244.
- Mil 83** K. A. Milton, *Ann. Phys.* **150** (1983), 432.
- Ok 63** S. Okubo, *Phys. Lett.* **5** (1963), 163.
- Ok 76** S. Okubo, *Phys. Rev.* **D13** (1976), 1994.
- Ok 77** S. Okubo, *Phys. Rev.* **D16** (1977), 2336, 3528.
- O'Do 77** P. J. O'Donnell, *Can. Jour. Phys.* **55** (1977), 1301.
- O'Do 81** P. J. O'Donnell, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981), 673.
- Os 80** T. Oshima, *Phys. Rev.* **D22** (1980), 707.
- Pa 78** J. Pasupathy, C. A. Singh, *Phys. Rev.* **D18** (1978), 791.
- Pa 84** W. Palmer, S. Pinsky, C. Bender, *Phys. Rev.* **D30** (1984), 1002.
- Pa 87** A. Palamo, *The Search for Gluonic Matter*, CERN Preprint CERN-EP/87-92, (1987).
- PD 88** Particle Data Group, 'Review of Particle Properties', *Phys. Lett.* **B204** (1988), 1.
- Po 73** H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1346.
- Ro 57** M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, (1957).
- Ro 78** D. Robson, *Nucl. Phys.* **B130** (1978), 328.

- Ro 83** J. L. Rosner, *Phys. Rev. D* **27** (1983), 1101; J. L. Rosner, S. J. Tuan, *Phys. Rev. D* **27** (1983), 1544.
- Ru 76** S. Rudaz, *Phys. Rev. D* **14** (1976), 298.
- Sa 69** J. J. Sakurai, *Currents and Mesons*, University of Chicago Press, (1969).
- Shi 79** M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov, *Nucl. Phys. B* **147** (1979), 385, 448.
- Shu 84** E. V. Shuryak, *Phys. Rep.* **115** (1984), 151.
- Sl 72** A. A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **10** (1972), 99.
- St 87** A. Stoddart, *Preprint UCT-TP 83/87*, University of Cape Town, (1987), unveröffentlicht.
- Su 78** J. Sucher, *Rep. Prog. Phys.* **41** (1978), 1781.
- Ta 71** J. C. Taylor, *Nucl. Phys. B* **33** (1971), 436.
- Te 83** T. Teshima, S. Oneda, *Phys. Rev. D* **27** (1983), 1551.
- Te 84** T. Teshima, S. Oneda, *Phys. Rev. D* **29** (1984), 2067.
- The 82** S. Theberge, G. A. Miller, A. W. Thomas, *Can. Jour. Phys.* **60** (1982), 59.
- tHo 71** G. t'Hooft, *Nucl. Phys. B* **33** (1971), 173; *Nucl. Phys. B* **35** (1971), 167.
- tHo 76** G. t'Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976), 8.
- Vi 83** R. D. Viollier, S. A. Chin, A. K. Kerman, *Nucl. Phys. A* **407** (1983), 269.
- Ya 54** C. N. Yang, R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954), 191.
- Zw 64** G. Zweig, *CERN Report 8419/TH412*, (1964), unveröffentlicht.

Danksagung

Ohne die wohlwollende Unterstützung von verschiedensten Seiten wäre diese Arbeit nicht so geraten, wie sie nun vorliegt.

An aller erster Stelle möchte ich meinen Eltern für mehr als ein Vierteljahrhundert Liebe und Geborgenheit danken und insbesondere für die fürsorgliche und finanzielle Unterstützung während der letzten Jahre.

Besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Walter Greiner für die Förderung und die großzügige Protektion, sowie für die ausgezeichneten Arbeitsbedingungen am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt.

Herrn Prof. Dr. Berndt Müller danke ich ganz herzlich für die zahlreichen anregenden Diskussionen und seine freundschaftliche Unterstützung in vielerlei Hinsicht.

Ebenso möchte ich Herrn Prof. Dr. Andreas Schäfer für die Durchsicht der Arbeit und wertvolle Anregungen danken.

Weiterhin geht ein herzliches Dankeschön an Frau Steidl, die die zahlreichen Figuren und Bilder angefertigt hat und an meinen Bruder Jochen Geiger, der einen erheblichen Teil der umfangreichen Tipp-Arbeit des Manuskripts leistete.

Außerdem danke ich allen Angehörigen des Instituts für Theoretische Physik in Frankfurt für die angenehme, menschliche Atmosphäre, in der ich mich sehr wohl gefühlt habe.

Bei der Gesellschaft für Schwerionen-Forschung (GSI) bedanke ich mich für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit und den Druck dieser Arbeit.

Schließlich will ich ganz besonders dem *Eckstein* für seine Gastfreundschaft, für großzügige Portionen 'Rote Läuse' und andere Elixiere, für sein illustres Publikum und für 'Home is where the heart is' danken. Ein Dankeschön an Thomas, Manfred, Barbara, Claudia, Brigitte, Gixe, Axel, Michael, Liam und alle anderen.

Lebenslauf

1.10.1962	Geboren in Stuttgart-Bad Cannstatt als Sohn der Lehrerin Anna-Maria Geiger, geb. Schüle und des Physikers Dr. Werner Geiger.
1964	Umsiedlung nach Hessen.
1968 - 1972	Besuch der Grundschule in Bad Homburg.
1972 - Dez. 1980	Besuch des Humboldt-Gymnasiums in Bad Homburg mit abschließendem Abitur.
März 1981 - Sep. 1981	USA Aufenthalt, u.a. zweimonatiges Praktikum am Battelle Columbus Laboratory in Columbus, Ohio.
1.1.1982 - 31.3.1983	Ableistung des 15-monatigen Grundwehrdienstes in Nienburg/Weser.
Okt. 1983	Beginn des Physikstudiums an der Johann Wolfgang Goethe Universität in Frankfurt.
Mai 1985	Physik Vordiplom.
April 1986	Beginn der Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt bei Professor Greiner.
Juni 1987	Erlangung des Physik Diploms.
Seit Aug. 1987	Tätig am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt, Beginn der Doktorarbeit.
Seit Nov. 1988	Promotionsstipendium der Graduierten-Förderung des Landes Hessen.
Juni 1989	Abschluß der Doktorarbeit.

